



TITLE:

メゾスコピック系の意義(メゾスコピック系,第46回物性若手夏の学校(2001年度)(その1),講義ノート)

AUTHOR(S):

勝本, 信吾

---

CITATION:

勝本, 信吾. メゾスコピック系の意義(メゾスコピック系,第46回物性若手夏の学校(2001年度)(その1),講義ノート). 物性研究 2002, 77(4): 605-634

ISSUE DATE:

2002-01-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97161>

RIGHT:

# メゾスコピック系の意義

東京大学物性研究所

勝本信吾

メゾスコピック物理の初歩的な解説と概観を通して、その物理学・工学における意義と今後の方向について考える。

## §1 Introduction

### §1.1 講義の概要

ここでは、メゾスコピック系入門<sup>1,2)</sup>として、ミクロとマクロの中間的なサイズを持つ系で、電子の量子としての性質がどのように現れるか、非常に初歩的な部分を紹介する。この紹介全体を通して、標題にあるように、この20世紀テクノロジーの申し子の分野がどのような意義を持っていたのか、今後どのような方向に進み、何をを目指すのか、考えていきたい。

基本的な題材は、2重障壁構造にとる。接合容量が大きい時の2重障壁構造は、メゾスコピック系で電子の波動性が顕著に現れた古い例の一つである。次に量子ポイントコンタクトを題材に取り、量子輸送の基本を学ぶ。

再び2重障壁構造に戻って、量子ポイントコンタクトを直列にすることで得られる量子ドット構造における単電子帯電効果、AB効果、更に本来の2重障壁構造を微細加工して得られる縦型量子ドットでの人工原子の実験を紹介する。

以上の基礎の上で、「メゾスコピック系で本当に新しいことは何か」ということを考えてみたい。その材料として、やはり金属接合をつかって2重障壁構造を作り、マクロ量子コヒーレンスを調べた実験を紹介する。またマクロ量子トンネル、マクロ量子コヒーレンスの基礎とその難しさについて解説する。

### §1.2 メゾスコピック物理の舞台

「メゾスコピック」(mesoscopic)という言葉は、「中間的な大きさの」という意味合いであり、ミクロでもマクロでもない、その間程度の大きさを指し示す際に使われる。現在では、このメゾスコピックの指す長さの指標はかなりばらついていて、研究が始まった1980年頃はむ

しろ明確な境界があった。それは、電子の位相コヒーレンス長(あるいは、位相干渉長, phase coherence length)(後述)よりも小さく、バンド描像の確立する格子定数の10倍程度よりも大きなサイズ、というものである。これは、メゾスコピック系の発見当初、人間の作り出した小さな系において、電子の波動性が明瞭に現れるということに重点が置かれていたためである。

「波動性」が現れるのは端的には干渉効果である。干渉効果の現れ方には、閉じ込められた波が繰り返し干渉して定在波を作る量子閉じ込め(Quantum confinement)効果と一度干渉してそのまま拡散していく場合の干渉効果の2種類が考えられる。量子閉じ込めに関しては、量子井戸という形ではかなり古くから研究が行われてきた。メゾスコピック系がにわかに注目を浴びたのは、この2つの中間的な場合であるアンダーソン局在に関連したAAS効果(後述)であった。

ここで、量子閉じ込めに基づいて、メゾスコピック系を分類してみると、ごく荒っぽく分類すると次のようになる。

1. 量子井戸(2次元電子系, 2次元超格子)
2. 量子細線
3. 量子細線回路
4. 量子ドット

これらそれぞれについて、概念的な図を描くと図1のようになる。固体が本来持っている3次元的な系に対して、1次元方向に位相干渉長より短い距離で系を切断してこの方向の自由度を制限し、2次元的な系を作り出したのが量子井戸である。これを更に別の1次元方向に量子閉じ込めを行って、系の次元を1次元に落としたものが量子細線である。量子井戸やこれを並べた形の2次元超格子は、古くは江崎とTsuによって提案されて以来<sup>3)</sup>、永く研究されてきた。3次元方向すべてを閉じ込めて零次元の系を作り出したのが、量子ドットである。

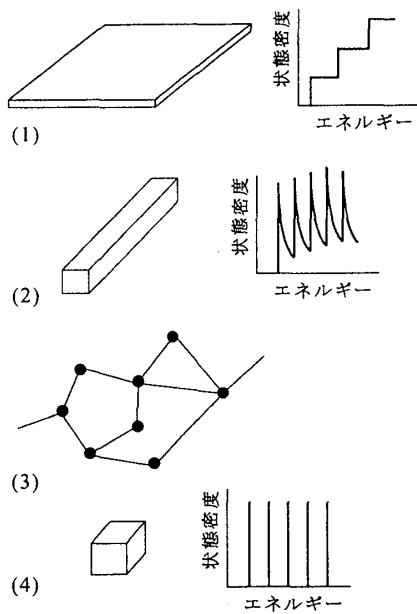


図 1: (1) 量子井戸 (2) 量子細線 (3) 量子細線ネットワーク (4) 量子ドットの概念図

ここでは、この量子閉じ込めによる分類に基づいて話を進めていくことにする。

## §2 2重障壁構造

まずは、初等量子力学の復習で、2重障壁構造での共鳴トンネル効果を見てみることにしよう。

### §2.1 ポテンシャル障壁の透過

まず、系を非常に単純化するため、1次元方向の運動のみ考える。図2(a)のように最も単純な障壁のトンネルから始めなければならないが、これはあまりに慣れ親しんでいると思うので、結果のみを記そう。トンネルを考える粒子の質量を  $m$ 、エネルギーを  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ 、減衰の係数  $\kappa$  を

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (1)$$

と定義すると、ポテンシャルの透過係数  $T$  は

$$T = \frac{4k^2 \kappa^2}{(k^2 - \kappa^2)^2 \sinh^2 \kappa a + 4k^2 \kappa^2 \cosh^2 \kappa a} \quad (2)$$

で与えられる。

図2(b)のように障壁が2つになった場合の取り扱いに

についても特に解説は不要であろう。透過率  $T$  は

$$T = \frac{|t|^4}{(1 - |r|^2 \cos(2kb + 2\alpha))^2 + |r|^4 \sin^2(2kb + 2\alpha)} \quad (3)$$

で与えられる。ただし、 $t$  は、単一障壁に対する波動関数の複素し出し率で

$$t = \frac{2ik\kappa e^{-ika}}{(k^2 - \kappa^2) \sinh \kappa a + 2ik\kappa \cosh \kappa a} \quad (4)$$

で与えられ、 $r$  は同様に複素反射率、 $\alpha$  はその偏角である。

(2), (3) の結果を入射電子のエネルギー  $E$  に対してプロットしたのが図3である。パラメタは、 $k_0 \equiv \sqrt{2mV_0}/\hbar$  と置いて、 $k_0 a$  が 0.5 (実線)、2.0 (破線) の場合、 $k_0 b$  を 5.0 に固定して計算している。単一障壁の場合はエネルギーが  $V_0$  よりも小さな場合には、透過率は単調であるが、2重障壁の場合は、パラメタによりピーク構造を持ち、ピークでの透過確率は1に達している。ピークの条件は、

$$kb + \alpha = n\pi \quad n: \text{integer} \quad (5)$$

である。

これは、良く知られた共鳴トンネル (resonant tunneling) と呼ばれる現象である。2重障壁の場合、2つの反射波に適当な位相差を持たせることで、その干渉効果により反射波を完全に消すことができる。これが共鳴トンネル条件であるが、これは、障壁の厚さを無視すれば、2つの障壁に挟まれた領域で反射波が干渉して定在波が発生する条件に相当する。すなわち、2つの障壁の高さが無限大であるとする、この障壁に挟まれた部分には、障壁垂直方向の運動については、波動関数の局在化と離散エネルギー準位が現れる。今は、1次元方向しか考えていないが、実際に3次元空間に2次元的な障壁を設けた場合には、他の2次元方向の運動の自由度はまだ残っている。このように波動関数の1次元方向のサイズを制限し、運動を量子化させた系を量子井戸 (quantum well) と呼ぶ。定在波条件はこの離散準位に入射電子のエネルギー

図 2: (a) 単一障壁 (b) 2重障壁

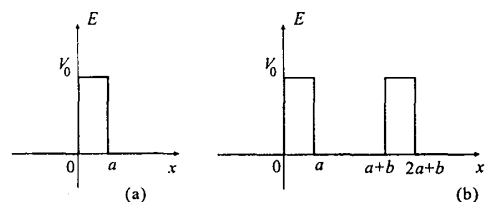
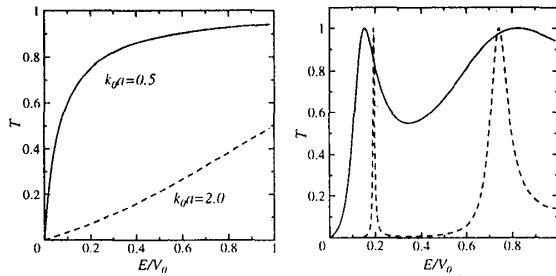


図 3: 1次元エネルギー障壁の透過確率 (a) 単一障壁 (b) 2重障壁の場合



ギーが一致することに相当する。これは、系を入射側の電極、量子井戸、出射側の電極の3つに分けて、その間のトンネルを考えた時、フェルミの黄金則近似が良く成り立っているということもできる。

## §2.2 ヘテロ接合

以上の話は、初等量子力学の教科書には大抵紹介されているが、波動関数の概念などを示すための、おもちゃ (toy model) であった。これをそのままではないが、かなり近い形で実現したのが、半導体ヘテロ接合である。これは、分子線エピタキシー (MBE) などの、原子層オーダーでフラットな成長面を形成でき、かつ材料を異種の原子種へ瞬時に変化できる結晶成長法を使い、2つの異なる半導体を清浄で平坦な面で接合したものである。

何でも接合できるわけではなく、格子定数や結晶型がそろっていること、成長条件に大きな差がないことなど、様々な条件がある。これらを満たし、良好なヘテロ接合が作成できる系としてポピュラーなのが GaAs/(Al,Ga)As である。この系では、電子の場合には Al の組成  $x$  を 0 から 0.45 まで変化させることにより、伝導帯の底のエネルギーを 0.3eV の範囲にわたって変化させることができる。 $x = 0.45$  を超えると、伝導帯は  $\Gamma$  点と X 点のエネルギーが交差することで色々面倒な事態が生じる。一方、価電子帯は、正孔バンドに重い正孔と軽い正孔の2種類あるために状況が複雑になっているが、上記の  $\Gamma$ -X の交差のような問題はなく、 $x = 1$  まで組成を使うことができ、高いエネルギー障壁を使うことができるというメリットがある。

実際に MBE を用いて 2重障壁 (量子井戸) 構造を作成する時の設計図に当たる断面図を図 4 に示した。この図の場合は、障壁の高さを高く取るために、ベース物質をバンドギャップの小さい (In,Ga)As に取り、2枚の AlGaAs 層で InGaAs 層を挟んでいる。ドーピングは両側の電極

図 4: 2重障壁トンネルダイオードの層構成の例

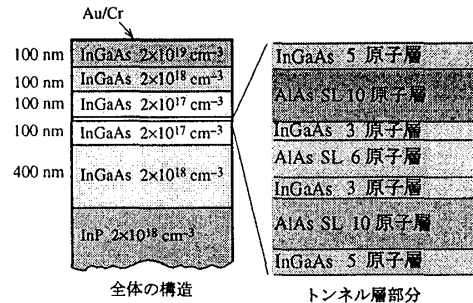
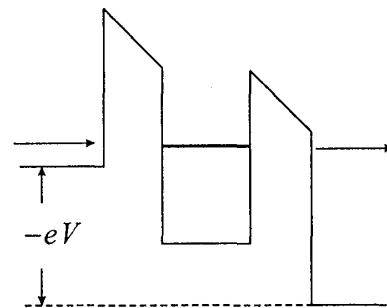


図 5: ソース・ドレイン電圧がかかった場合の2重障壁ダイオードの模式的バンドダイアグラム



となる InGaAs 層にのみ行う。バンドダイアグラムはほぼ図 2(b) のようになると考えてよい。しかし、入射電子のエネルギーを自由に変更することは実験では容易ではない。左右の電極 (これらをドレイン、ソースと称する) がフェルミ縮退している場合は、入射電子のエネルギーはほぼドレインのフェルミエネルギーと考えてよい。そこで、ソース・ドレイン間に電圧を与えることで、実効的に入射電子エネルギーを変更するという手法を使う。電圧はほとんど障壁部分にかかるので、模式的には図 5 のようになる。

## §2.3 電流電圧特性

実際の系の電気伝導には、障壁に平行な運動の自由度が残っていることを始め、上記のように様々な複雑な要因がある。前節のようにして透過係数を求めておいて、適当な近似の下で計算を進めることが現実的である。ここでは、次節の Landauer 公式にもつながる方法で全電流を計算してみよう。まず、入射電子のエネルギーについて、障壁に垂直な成分  $E_z$  と平行な成分  $E_{\parallel}$  とに分解する。質量の異方性は考慮しないことにする。左電極から

右電極へ流れる電流は、 $z$  方向の群速度  $v_{gz} = \partial E / \hbar \partial k_z$  を用いて、

$$\begin{aligned} J_{L \rightarrow R} &= e \sum_k v_{gz} f_L (1 - f_R) T \\ &= \frac{2e}{(2\pi)^3 \hbar} \iint d^2 k_{\parallel} dk_z \left( \frac{\partial E_z}{\partial k_z} \right) f_L (1 - f_R) T \\ &= \frac{em}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE_z dE_{\parallel} f_L(E) (1 - f_R(E)) T(E_z) \end{aligned} \quad (6)$$

と書くことができる。ただし、1 行目から 2 行目に移る際に、電子系は単純なパラボリック・バンドで、状態密度の異常などはない、とした。 $T(E_z)$  はエネルギー  $E_z$  での障壁の透過係数である。

全体として流れる電流  $J$  は、これから右電極から左電極へ流れる電流を差し引いたものであるから、

$$\begin{aligned} J &= (J_{L \rightarrow R} - J_{R \rightarrow L}) \\ &= \int_0^\infty dE_z T(E_z) S(E_z) \end{aligned} \quad (7)$$

$$S(E_z) = \frac{em}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \{f_L(E) - f_R(E)\} dE_{\parallel} \quad (8)$$

と書ける。 $S(E_z)$  は、供給関数 (supply function) と呼ばれるもので、 $f$  として Fermi 分布を採用すると、 $\beta = (k_B T)^{-1}$  として

$$S = \left( \frac{em k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \right) \ln \left[ \frac{1 + \exp \beta (E_F - E_z)}{1 + \exp \beta (E_F - E_z - eV)} \right] \quad (9)$$

と計算される。Fermi 縮退している場合には、

$$S(E_z) = \begin{cases} (em/2\pi^2 \hbar^3)(E_F - E_z) & (E_F - eV \leq E_z \leq E_F) \\ (em/2\pi^2 \hbar^3)eV & (0 \leq E_z \leq E_F - eV) \end{cases} \quad (10)$$

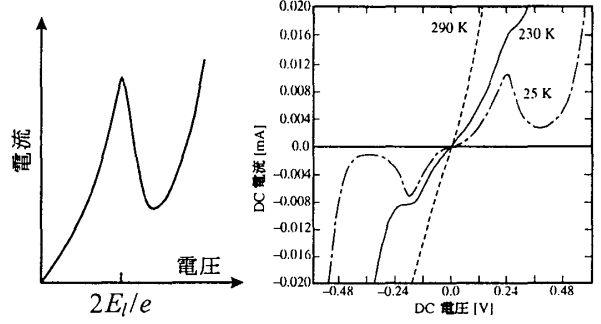
と、台形関数となる。以上から、 $eV < E_F$  の場合は

$$\begin{aligned} J &= \frac{em}{2\pi^2 \hbar^3} \left[ eV \int_0^{E_F - eV} dE_z T(E_z) \right. \\ &\quad \left. + \int_{E_F - eV}^{E_F} dE_z (E_F - E_z) T(E_z) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

と計算される。

実験と比較するためには、まだ様々な考慮すべき効果があるが、ここで、やや大まかな近似に移ることにしよう。実際のデバイスでは、入射電子のエネルギー  $E$  を変化させるためには、フェルミ準位  $E_F$  を変化させる必要があるが、量子井戸試料ではこれが難しく、実際には図 5 のように、ソース・ドレイン間に与えた電圧バイアス

図 6: AlGaAs/GaAs (Al 0.25) について、電流電圧特性の計算結果 ( $E_l$  は共鳴レベルのエネルギー) と、測定結果<sup>4)</sup>



によって  $E$  の変化を代用する。すなわち、電圧バイアス  $V$  によって、量子井戸の底のエネルギーは、ドレインに比べて  $-eV/2$  だけ低下するので、(11) で  $T(E_z)$  の所を  $T(E_z + eV)$  で置き換える。

以上の近似を用いて、実験パラメタに対して IV 特性を計算して実験と比較した例を図 6 に示した。

### §3 経路積分

ここでやや唐突だが<sup>5)</sup>、Feynman の経路積分の考え方を紹介しておこう<sup>5, 6)</sup>。これは、メソスコピック系のコヒーレント伝導やトンネル現象を理解する上で大変便利な考え方である。これは考案者自身によって明解・懇切に、様々なレベルの読者に対して語られているので<sup>7)</sup>、より深くその考えを探りたい方はそれらの解説を参考にしていきたい。

一粒子の Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H\psi(x, t) \quad (12)$$

から出発する。簡単のために、1 次元系とする。ある時刻  $t'$  での状態が  $\psi(x, t')$  であったとすると、時間発展を表す演算子

$$U(t, t') \equiv \exp \left( \frac{H(t' - t)}{i\hbar} \right) \quad (13)$$

を用いて、

$$\psi(x, t) = U(t, t') |\psi(t')\rangle = \int dx' K(x, t; x', t') \psi(x', t') \quad (14)$$

と書ける。2 番目の式は、 $x$  表示で書いたもので、 $K(x, t; x', t')$  は時間発展演算子の座標表示での行列要素であるが特に Feynman 核と呼ばれ、

$$K(x, t; x', t') = \langle x | U(t, t') | x' \rangle \quad (15)$$

である。

次に、この時間発展を無限小の時間に対する時間発展の積み重ねで書くことを考える。時間区間  $(t, t')$  を  $N$  等分して間隔  $\Delta t = (t - t')/N$  の区間に分けると、

$$U(t, t') = U(t, t_{N-1})U(t_{N-1}, t_{N-2}) \cdots U(t_2, t_1)U(t_1, t') \quad (16)$$

と分解して表すことができる。すると、Feynman 核は

$$K(x, t; x', t') = \int dx_{N-1} dx_{N-2} \cdots dx_1 \times K(x, t; x_{N-1}, t_{N-1}) \cdots K(x_1, t_1; x', t') \quad (17)$$

ここで、 $x_j$  は時刻  $t_j$  での座標である。後で極限  $N \rightarrow \infty$  を取ることを考え、 $U(t_j + 1, t_j)$  は  $\Delta t$  の一次まで取った  $1 - (i/\hbar)\Delta t H$  で置き換える。更にこれに一種の Fourier 変換を施す。即ち、運動量固有関数の完全性と位置座標固有関数と正準共役であることを使う。

$$\begin{aligned} K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) &= \langle x_{j+1} | \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t H \right) | x_j \rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi} \langle x_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t H \right) | x_j \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $H$  は演算子  $\hat{p}, \hat{x}$  で書けているので、

$$\begin{aligned} \langle p_j | H(\hat{p}, \hat{x}) | x_j \rangle &= \langle p_j | x_j \rangle H(p_j, x_j) \\ &= \exp(-ip_j x_j / \hbar) H(p_j, x_j) \end{aligned} \quad (19)$$

である。これより (18) は、指数関数を書き戻して

$$\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[ i \frac{p_j(x_{j+1} - x_j)}{\hbar} - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(p_j, x_j) \right] \quad (20)$$

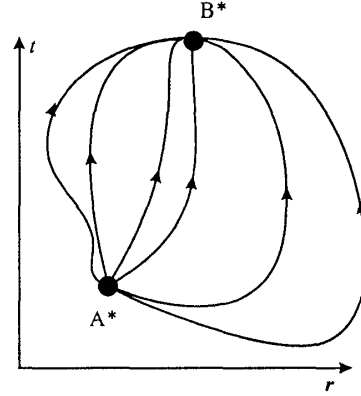
となる。これを使って Feynman 核 (17) を更に変形すると

$$\begin{aligned} K(x, t; x', t') &= \int \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j dx_j}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} (p_j(x_{j+1} - x_j) - \Delta t H(p_j, x_j)) \right] \\ &= \int Dp Dx \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\xi (p_\xi \dot{x}_\xi - H(p_\xi, x_\xi)) \right] \\ &(\Delta t \rightarrow 0, N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (21)$$

$$= \int_{x'}^x Dp Dx \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\xi L(x_\xi, \dot{x}_\xi, p_\xi) \right] \quad (22)$$

$$= \int_{x'}^x Dp Dx \exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right) \quad (23)$$

図 7: Feynman 流の量子化。時空間のあらゆる経路についての確率振幅を足し上げる。



ここで、 $L$  は古典力学における Lagrangian,  $S$  は作用(積分)と呼ばれる量である。また、積分のために時間  $\xi$  を導入した。  $\int_{x'}^x Dp Dx$  のように書いた積分が経路積分と呼ばれるもので、 $x'$  を時刻  $t'$  に出発して時刻  $t$  に  $x$  に到達するあらゆる経路について積分することを意味している。

以上導いた式について考えてみよう。Feynman 核は (14) からわかるように、波動関数の時間発展を表す量であった。それが、(23) のように書けたということは、量子力学に次のような見方が可能である事を示している。これまで 1 次元系で考えてきたが、他の次元でもこれまでの話は成立するとする。ある時刻に A 点から出発した一粒子の運動を時間発展に沿って考える。この出発点を時空間で A\* と書くことにする。量子力学は、この粒子が別の時刻に B 点に到達する確率を与える。この点を、時空間で B\* とする。Feynman 流の解釈では、この A\* を通る粒子は、時空間的に可能なあらゆる世界線(経路, path)を通してゆく。この世界線は、一価で連続であれば、特に何等かの法則に従う必要はない。即ち、光速を超えたり時間を遡ったりしてもかまわない。それぞれの世界線は、位相

$$S = \int d\xi L(x_\xi, \dot{x}_\xi, p_\xi) \quad (24)$$

を持つ。求めるべき確率は、この、A\* と B\* を結ぶあらゆる世界線を、等しい重みで上式の位相をつけて足し上げ、その振幅を求める事で得られる。

この、Feynman 流の考え方は、古典解析力学での「最少作用の法則」と共通の考え方である。実際、計算の上で最も大きな寄与を及ぼすのは、「作用(action)」を最小にする経路であり、これを古典経路と呼ぶ。このように  $S$

が最小値をとるような経路は、その周りの経路の微小な変化  $\delta$  に対する作用の一次の変化  $\delta S$  が零になる事から、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

となり、これは当然古典的な Lagrange 方程式である。

最初に考えた、無限の経路は計算の方便のために考えたものではない。粒子は実際にこれらのすべての経路をとる、と考える。ただし、経路にはすべて位相がついており、観測結果の計算のためにはすべての経路の寄与を複素数として足し上げなければならない。

以上を、形式的に多自由度系に拡張するのは容易である。  $N$  体の場合  $x \equiv (x_1, \dots, x_N)$  と書き、また、上記の  $a$  点  $b$  点の話に合わせて、添え字を  $a, b$  としておく。また、「多体の波動関数」も普通に  $\psi$  と書いてしまうことにすると、

$$\psi_b(x^b) = \int \prod_{i=1}^N dx_i^a K(x_b, x_a; T) \psi_a(x^a) \quad (26)$$

$$K(x^b, x^a; T) \equiv \int_A^B Dx \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(x, \dot{x}) \right] \quad (27)$$

となる。ここで、 $t_a, t_b$  と書く代わりに  $T$  とした。勿論これは全くの形式論である。ここから進んで実用的に色々な量を計算するには粒子の統計性などを頭に考え、場の量子化を行っていくことになる。ここではそこまでの議論は行わない。

次に虚時間形式について簡単に述べておく。簡単のため、一粒子の場合に話を戻す。経路積分を行うために導入した時間  $\xi$  を  $-i\tau$  で置換する。この時、これまでの計算と全く平行な議論によって

$$\begin{aligned} \langle x' | \exp(-H\tau/\hbar) | x \rangle \\ = \int Dx_{\tau'} Dp_{\tau'} \exp \left( -\frac{1}{\hbar} S(x_{\tau'}, p_{\tau'}) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

となり、この右辺の  $p$  についての積分を行うと、

$$= \int_{x_a}^{x_b} Dx_{\tau'} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \left( \frac{m \dot{x}_{\tau'}^2}{2} + V(x_{\tau'}) \right) d\tau' \right] \quad (29)$$

となって、実時間形式に比べて丁度ポテンシャルを反転させて、位相項を減衰に置き換えた形をしていることが示せる。ここで、 $\tau = \hbar/k_B T \equiv \beta\hbar$  と置くと、分配関数を  $Z$  として

$$Z = \text{Tr} \exp -\beta H = \int dx \langle x | \exp -\beta H | x \rangle \quad (30)$$

であるから、虚時間形式で時刻 0 に  $x$  を出発して  $\tau$  後に  $x$  に戻る境界条件で経路積分を計算すると、分配関数を求めることができる。虚時間を考えると温度を導入できることは、温度 Green 関数などの場合と同様の事情である。(29) では、実時間では位相になっていた作用が、減衰を表す項になっているため、「最小作用の原理」が一目瞭然である。すなわち、最も寄与の大きな経路を調べるには、ポテンシャルを上下ひっくり返した系で古典的な運動方程式を考えれば良いことになる。

## §4 Landauer 公式

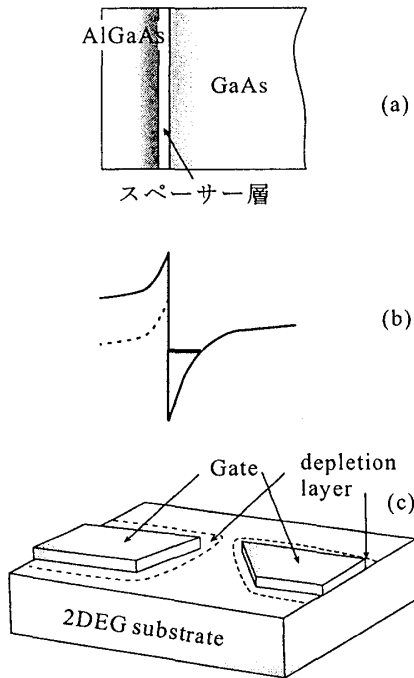
次元を一つ落として、1 次元の量子細線の電気伝導を考えよう。量子細線の作製法は様々だが、最も多いのは、前節の 2 重障壁の中を孤立させて作った 2 次元電子系を更に微細加工技術を使って 1 次元的に閉じ込めるものである。2 次元電子系には、量子ホール効果を始め、非常に多彩な現象が現れるが、ここでは触れている余裕がない。まずは、実験の紹介を行い、伝導度の Landauer 公式を最も簡単な場合について導き、その物理的意味を考える。次に、これをメゾスコピック系に現れる干渉効果の代表であるアハラノフ・ボーム (AB) 効果に適用する。最後に、普遍的伝導度のゆらぎについて紹介する。

### §4.1 量子ポイントコンタクト

2 重障壁構造では、ヘテロ接合を使って障壁のサンドイッチ構造を作製したが、もともとキャリアの少ない半導体層を使用すると単一の接合でも実効的な量子井戸を作って 2 次元的な電子を発生させることができる。図 8(a) のように、GaAs にこれよりややバンドギャップの大きな (Al,Ga)As を接合させ、更に (Al,Ga)As 層のみ  $n$  型にドーピングする。接合付近では、エネルギーの低い GaAs 側に電子が入り込み、図 8(b) のような 3 角形状のポテンシャルを形成する。このポテンシャルによって 2 次元電子系が形成される。電子は下のサブバンドから順に占有していくが、ここでは簡単のため最も下のサブバンドのみ考え、他のサブバンドは十分に高いエネルギーにあって無視できるとする。このような 2 次元電子系 (2DES) は、ドーピングした不純物と空間的に分離されているため、低温での電子の散乱の主要因であるイオン化不純物散乱が抑えられ、低温での移動度が極めて高くなる。すなわち、平均自由行程が非常に長くなり、数  $\mu\text{m}$  オーダーの系の中では電子はほとんど散乱なしに進む。このような伝導を弾道的伝導 (ballistic conduction) と呼ぶ。

次に、図 8(c) のように、表面に金属電極を微細加工し

図 8: ヘテロ接合2次元電子系とゲート修飾による微細加工  
(a) AlGaAs/GaAs ヘテロ接合構造 (b) 伝導帯バンドダイヤグラム (c) 微細加工ゲート電極による修飾

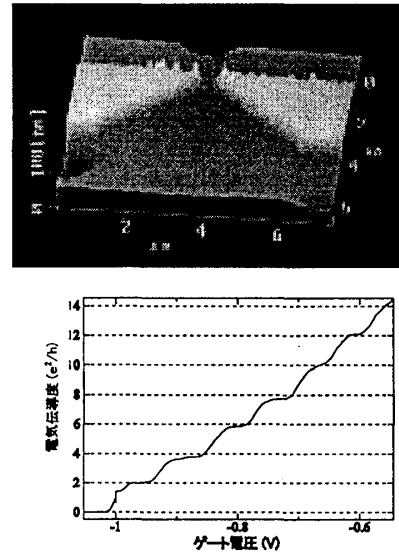


て乗せる。このような金属は一般に表面のフェルミ準位をピン止めし、吊り上げるため、金属の下では2次元電子系が存在できなくなる。キャリアが存在しなくなった領域を、空乏層、空乏領域、などと呼ぶ。このようにして形成する一種の障壁を Schottky 障壁と呼ぶ。更にこの金属 (Schottky 電極、また、電子の流れを制御する意味でゲート電極と呼ぶ) に電圧を加えることで、電極の下電子濃度を制御することができ、また、負電圧を加えて行くことで、電極の下だけでなく、横方向にも空乏層を伸ばすことができる。図 8(c) のように小さなギャップ構造の電極を作成すると、このゲートの電圧を制御することで、非常に細い線を得ることができ、更にその幅を制御できる。

このような構造で、ゲート電圧に対して電気伝導度を測定した実験結果が図 9 である。負電圧をかけていくにつれて伝導度は減少し、あるところで零に落ちる (ピンチオフ)。ところが、伝導度の現象過程で、階段状の変化をしている。この階段の高さは、点線で示したように、ほぼ  $2e^2/h$  という普遍的な量になっている。

この伝導度の量子化は、細線の幅方向のエネルギー準位の量子化によるもので、1つのサブバンド (ないし伝導チャンネル) の持つ伝導度が  $2e^2/h$  であることを示し

図 9: 上: GaAs/AlGaAs 上に形成した微細ショットキー電極の AFM 像 下: 上の試料で形成した量子ポイントコンタクトの電気伝導度をゲート電圧の関数として測定した結果。測定温度は 0.03K.



ている。このような量子細線を量子ポイントコンタクト (Quantum Point Contact, QPC) と呼ぶ<sup>8)</sup>。

#### §4.2 単チャネル散乱なしの2端子 Landauer 公式

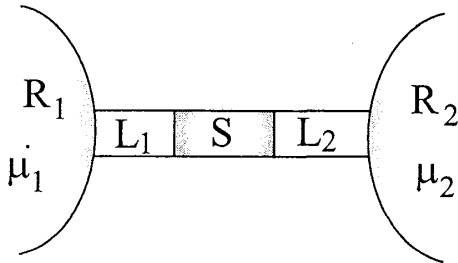
QPCでのコンダクタンスの量子化は、伝導度の Landauer 公式で良く説明することができる。とりあえず、ここでは弾道的な伝導チャンネル (サブバンド) が一つだけの量子細線を考え、スピンによる縮退を考えないことにする。また、電子間相互作用、温度の影響をとりあえず考えないことにする ( $T = 0$ )。量子細線の伝導を考えるモデルとして図 10 のようなものを考える。すなわち、試料の左右に電子溜め (reservoir)  $\text{Res}_1$ ,  $\text{Res}_2$  を置く。これらの化学ポテンシャル (電気化学ポテンシャルのことを単にこう記す) はそれぞれ  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  で、 $\mu_1 > \mu_2$  とする。また、試料と電子溜めとの間には、「理想導線」 $L_1$ ,  $L_2$  が入っているとする。この理想導線は、また電極と呼ばれる場合もある。理想 (完全) 導線 (Perfect lead) とは、電子の散乱がなく、またすぐ後で要求するような状態を常に保っているような導体と定義する。

電子溜め、導線等について、次の3つを仮定する。

1. 2つのリードと試料の中は、フェルミ縮退状態。  $\mu_2$



図 10: Landauer 公式を導く際の量子細線の電気伝導のモデル



以下の状態はすべて占有されている。

2.  $L_1$  の中では更に、速度が右向きでエネルギー  $\mu_1$  以下の状態はすべて占有されている。
3.  $\text{Res}_1, \text{Res}_2$  は十分大きく、ここで考えている電流では熱平衡を乱されない。(電流として流れ込んだ/引き抜かれた電子/ホールは即時に緩和する。)

特に条件 2. がどの程度現実的かどうかが問題となるであろう。これは、Landauer 公式に対する筆者独自の解釈ともつながるので、再論する。

細線方向の運動の分散関係を  $E(k)$  と書く。波数  $k$  の状態が運ぶ電流  $J(k)$  は

$$J(k) = \frac{e}{L} v_g = \frac{e}{hL} \frac{dE(k)}{dk} \quad (31)$$

となる。ただし、 $L$  は、波動関数を 1 次元方向で規格化するときを使用した規格化の長さである。 $E(k)$  が  $\mu_2$  と  $\mu_1$  との間にある状態が電流を運ぶことができるので、全電流  $J$  は

$$J = \int_{k_2}^{k_1} J(k) L \frac{dk}{2\pi} = \frac{e}{h} \int_{\mu_2}^{\mu_1} dE = \frac{e}{h} (\mu_1 - \mu_2) = \frac{e^2}{h} V \quad (32)$$

ここで、 $k_i (i=1, 2)$  は  $E(k_i) = \mu_i$  となる方程式の解で、左右の電子溜めの間の電圧を  $V$  とした。これより、量子細線の伝導度 (コンダクタンス, conductance)  $G$  は

$$G = \frac{e^2}{h} \equiv G_q \equiv R_q \quad (33)$$

となる。導出、結果とも、以上のように極めて簡単なものである。 $R_q$  は  $25.8\text{k}\Omega$  程度で、量子化抵抗  $G_q$  は  $3.87 \times 10^{-5}\text{S}$  程度で、量子化コンダクタンスと呼ばれる。

### §4.3 物理的な解釈

さて、この導出について、もう少し物理的な解釈を進めてみよう。導出の途中で、規格化の長さ  $L$  が現れた。

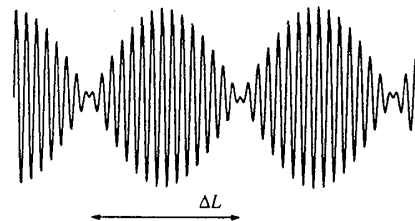
これは、固体中の広がった波動を扱う場合には常に現れる問題で、最終的には解答が  $L$  によらない形になれば良いことになっている。ただ、通常は、電子の濃度など、固体に個別のパラメタに吸収されるはずであるのに、ここでは結果は完全にユニバーサルな形になっており、 $L$  は跡形もなく消えてしまった。また、同様に途中で現れた分散関係も消えてしまった。以上のことから、この導出には、何かもう少し簡単な物理的な「裏」があるのではないか、という予想が立つ。

そこで、次のように考えてみよう。仮定 1., 2. により、量子細線中に右向きの波束を作るとすると、使えるエネルギーは  $\mu_2$  から  $\mu_1$  の間である。図 11 は、このようにして作った波束列を模式的に描いたものである。ただし、実際にはこのような振幅変調のついた波動関数が流れていくわけではない、ということを強調しておこう。波の群速度を導入する際に、波に振幅変調を作って変調の動く速さを調べたのと同じ考え方である。実際には相互作用を無視した場合の電子の流れは、ほぼ一樣なものであろうと考えられる。さて、ここでは、この波束の幅や、速度などは一切考えないことにする。それでも言える事は、図 11 のような波束列を作ったとすると波束の到達頻度は  $f = (\mu_1 - \mu_2)/h = eV/h$  であることである。これは、両側の電子溜めの間の化学ポテンシャルの差による量子ビート (うなり) の周波数である。この「うなり」1 個に電子が 1 個乗ってくると考えれば  $J = ef = (e^2/h) \times V$  で、(32) が簡単に導ける。

$L$  や  $E(k)$  が消えてなくなったのは、以上のように簡単な理由からであった。すなわち、Landauer の公式では、電気伝導度の有名な久保公式のように微視的に試料のどこをどのような電流密度で電荷が移動するか、ということの問題にしない。化学ポテンシャルの差と、電流だけを考え、後者は、電荷が「完全電極」に到達する頻度であるから、伝播の途中の密度や速度は一切問題にならないのである。

すると、問題になるのは、何故「うなり」1 個に電子

図 11: 量子細線中に波束列を作ったと考える



1 個という対応になるか?ということであろう。ここに実は、先に述べた仮定 2. が関わっている。すなわち、電子はフェルミ粒子であるから、空間的に孤立した波束状態を作り出せば、それがすべて占有された状態から作られたものであれば波束一個に電子 1 個が乗っているというのは当然である ((32) で規格化の  $L$  が消えたのもこの事情による)。したがって、電極  $L_1$  の波束を作るための状態に常時電子を十分に供給する、という、仮定 2. の条件によって、波束 1 個に電子 1 個という対応が得られている。以上の議論から、粒子がフェルミオンであることも重要な条件であることがわかる。一部の解説や論文で、Landauer 公式は粒子の統計性によらず成立する、としているのはこの意味においては誤りで、多くのそれらしい実験では、ボゾンを使っているため伝導度の量子化のようなものが観測されていると、筆者は考えている。

以上、見たことからわかるのは、量子細線の電気伝導と言っても、散乱がない、とした場合は、伝導度を決めているのは電極と量子細線との接続の仕方であることである。この意味で、Landauer 公式に現れる量子化抵抗のことを、量子細線と電極との接触抵抗であると見ることもできる。

#### §4.4 多チャネルの場合

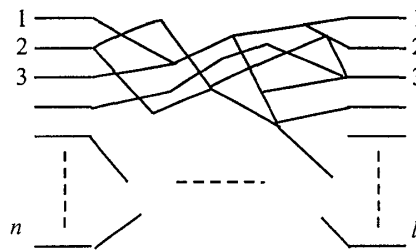
単一の量子細線で伝導に寄与するサブバンド数(チャネル数)が増えた場合は、散乱のない場合は、単純で、(32) にチャネル数をかけた伝導度を得られる。また、散乱がある場合は、これを各チャネルの透過率で表現すると、 $n$  個の伝導チャネルのある量子細線の伝導度は

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{i=1}^n T_i \quad (34)$$

で与えられる。 $T_i$  は各チャネルの透過率である。また、ここで、前副節では考慮しなかったスピンによる縮退を考慮した。

次に、量子細線のネットワークを考える。このようなものを考える意義は、実際にネットワークを作った場合の伝導度を考える際に役立つことと、これが、乱れた系の伝導を考える上での 1 つのモデルになることである。後者については、電子の空間的な伝播をファインマン経路の足し合わせで考える立場で考えるとわかりやすい。電子波の振幅の大きな「古典経路」を量子細線で置き換えた、と考える。乱れた固体中では電子波は多数の不純物で散乱されるため、古典経路も単純な直線ではなく、図 12 のように多数のラインを考える必要があり、これを量

図 12: 乱れた伝導体の伝導チャネルネットワーク (量子細線ネットワーク) モデル



子細線のネットワークでモデル化するわけである。重要なことは、Landauer 公式では、前副節で見たように「量子細線」の特性は、チャネル数と書くチャネルの透過率しか問題にしない。細かな特性を気にする必要がないのである。これは、乱れた伝導体を量子細線ネットワークでモデル化するには有利な点である。

さて、図 12 のようにネットワークに入力のチャネルが  $n$  個、出力のチャネルが  $l$  個あったとすると、ネットワークの透過率は、チャネル  $j$  に入った電子がチャネル  $i$  へ出力される確率  $T_{ij}$  と行列で表される。従って、この場合も、伝導度は

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n T_{ij} \quad (35)$$

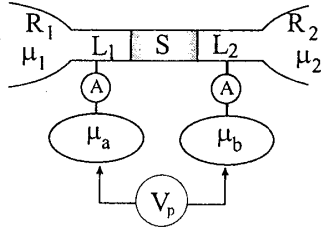
と簡単に表すことができる。

#### §4.5 4 端子 Landauer 公式

次に 4 端子の場合を考える。物性実験で電気伝導測定を行っている人ならほとんど知っているように、電気伝導は一般に電流端子と電圧プローブを別にとって 4 端子方で測定しないと正しい結果は得られない。前副節の Landauer 公式は、明らかに 2 端子の伝導度についてのものであり、従って接触抵抗が現れた。そこで、今度は図 13 のように電子溜め以外に導線にもプローブをつけて、4 端子測定をすることを考えよう。電圧測定器  $V_p$  の入力インピーダンスは十分に高く、プローブには電流は流れないとする。

$V_{pa}$ ,  $V_{pb}$  の化学ポテンシャルを  $\mu_a$ ,  $\mu_b$  と置く。導線 1 の中では、仮定により  $\mu_2$  より下のレベルはすべて占有されており、 $\mu_1$  と  $\mu_2$  の間も右向き状態は占有され、左向き状態は、 $1 - T$  の割合で反射された電子を収納している。導線 1, プローブ a の状態密度をそれぞれ  $D_1$ ,  $D_a$  とし、導線とプローブの間の行列要素を  $t_{1a}$  とすると、フェルミの黄金律近似を使って、導線からプローブ

図 13: 4 端子の Landauer 公式を導くためのモデル



へ単位時間に流入する電子数は

$$(2\pi/\hbar)|t_{1a}|^2 D_a D_1 (\mu_1 - \mu_a)(2 - T)$$

である．逆方向の電子数も同様に

$$(2\pi/\hbar)|t_{1a}|^2 D_a D_1 (\mu_a - \mu_2)T$$

と求められ，これらが等しいという条件から

$$\mu_a = \frac{1}{2}(\mu_1(2 - T) + \mu_2 T) \quad (36)$$

となる． $\mu_b$  についても同様に，

$$\mu_b = \frac{1}{2}(\mu_1 T + \mu_2(1 - T)) \quad (37)$$

であるから，結局，

$$\mu_a - \mu_b = (1 - T)(\mu_1 - \mu_2) \quad (38)$$

より，

$$G(4 \text{ 端子}) = \frac{G(2 \text{ 端子})}{1 - T} = \frac{2e^2}{h} \frac{T}{1 - T} \quad (39)$$

であることがわかった．

#### §4.6 アハロノフーボーム (Aharonov-Bohm (AB)) 効果

固体中の AB 効果は，メゾスコピック系の物理の始まりを告げたものとして有名であるが，Landauer 公式を適用する教材としては，あまり適当でない．AB 効果の舞台となるのは，図 14 のような，円形（多重連結）の伝導体である．これに Landauer 公式を適用するとすれば，量子細線を並列にした系，ということで，格好の対象のように思える．ところが，実際に計算してみると，文献 9 のように，非常に複雑な結果が得られる．これは，Landauer 公式をまともに適用すると，円を何周もまわるような軌道やその他の様々な軌道の寄与がすべて取り

図 14: AB 効果を観測するための試料の模式図

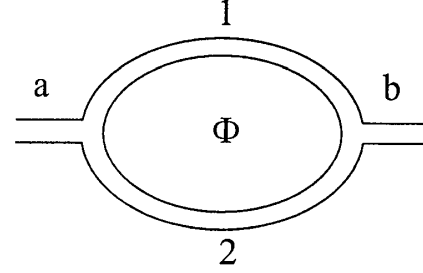
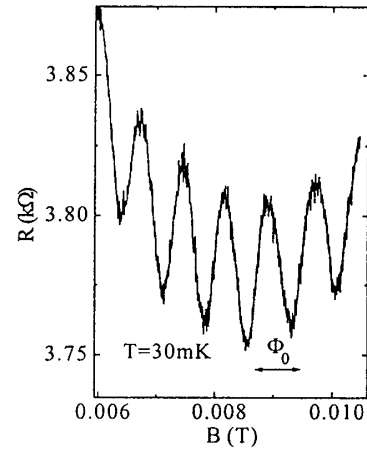


図 15: AlGaAs/GaAs 2 次元電子系を電子線リソグラフィーと微細加工でリング形状にした試料の AB 効果



込まれるためである．これは，量子的な伝導体の回路を取り扱う難しさを示している<sup>1</sup>．

現実の系では，電子波が図 14 のような系の中を伝播する際に，何らかのデコヒーレンスを起こす散乱を受けるため，すべての空間軌道を取り入れる必要はなく，主要な幾つかのファインマン経路について考えれば良く，後は古典的なバックグラウンドと考えることができる．

そこで，導線 a のチャネル  $m$  から導線 b のチャネル  $n$  へ遷移する確率振幅を考えよう．図 14 で経路 1（上側）を進む  $m \rightarrow n$  のファインマン経路をすべて足し合わせた複素振幅を  $t_1$ ，2 についても同様に  $t_2$  としよう．すると， $T_{mn} = |t_1 + t_2|^2$  である．

今，磁場  $B$  が存在して，そのベクトル・ポテンシャルが  $A$  だったとしよう． $A$  が複素振幅に及ぼす効果は，次

<sup>1</sup>S 行列の方法を使用することである程度このような沢山の Feynman 経路の足し上げの計算は可能である．講義ではその例にも触れる．

のような位相  $\varphi_1, \varphi_2$  がつくことである。

$$t_1(B) = t_1(0) \exp(i\varphi_1), \quad t_2(B) = t_2(0) \exp(i\varphi_2) \quad (40)$$

$$\varphi_1 = \exp \left[ i \frac{e}{\hbar} \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right], \quad \varphi_2 = \exp \left[ i \frac{e}{\hbar} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] \quad (41)$$

2つの腕を回ってきた電子波の位相差は

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (42)$$

となる。ここで、 $\Phi$  はリングを貫く磁束、

$$\Phi_0 \equiv \frac{h}{e} \quad (43)$$

は磁束量子 (flux quantum) と呼ばれる量である。超伝導を扱う際には、電荷の単位が  $e$  でなくクーパー対の  $2e$  であるため、 $h/2e$  を磁束量子と呼ぶので注意しよう。以上から

$$T_{mn} = T_1 + T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2} \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + \varphi \right) \quad (44)$$

となり、 $T_1 = T_2$  という理想の場合には 100% の振幅で伝導度が振動する結果が得られる。結果がこのように簡潔になったのは、経路として上下を一度だけ通過するという最も簡単なもののみを取ったためである。

実際の実験では、図 15 に示したように、非常に小さな振幅しか得られない。これについて、金属リングの場合は、拡散的伝導のために伝導チャネルの数が非常に多く、(44) の  $\varphi$  の項が各チャネルについてランダムであるため相殺して小さくなる、という説明がなされてきた。実際、そのような効果があるのは間違いない。しかし、半導体リングのようにチャネル数が十分小さく、位相干渉長も長い場合にもこのように振動が小さいことは理解しがたく、また、比較的強磁場下に置いた場合のエッジチャネルなどでは非常に大きな AB 振幅が得られることも相容れがたい。これについては、最近筆者の所で測定の設定アップにより AB 振幅に非常に大きな影響がある、という結果が得られており、講義ではそのデータも提供したい。

#### §4.7 普遍的伝導度ゆらぎ

ここで言う、「伝導度ゆらぎ」というのは、次のような意味である。今、一つの一様な伝導体試料を取り出そう。この試料は不純物が均一に混入している、という意味では一様であるが、不純物の配置は完全にランダムである。従って、この試料を小さく切り刻んで、ランダムな不純物

の平均間隔近くまで小さくすると、試料によって電子の散乱のされ方は異なるから、伝導度も試料ごとに異なってくるであろう。「伝導度ゆらぎ」とは、この試料による伝導度のばらつきの度合い、ということである。すなわちゆらぎの 2 乗の平均

$$\langle (\Delta g)^2 \rangle \equiv \langle (g - \langle g \rangle)^2 \rangle \quad (45)$$

がどうなるか、ということが問題となる。

これはいずれも平均の量であるから、統計力学的な計算が可能である。結果は、驚くべきことに、絶対零度においては、伝導度ゆらぎは試料の平均伝導度やその他の詳細によらず、系の対称性—ユニバーサリティクラス—にのみ依存し、いずれにしても、ほぼ  $\langle (\Delta g)^2 \rangle \sim G_q^2$  であることがわかった。大きな試料では、一見、小さな試料の伝導度が平均化されてゆらぎが抑えられるような気がするが、量子力学的抵抗器を接続した場合には、Landauer の公式を使った回路の接続に見るように、単純な平均化は起こらない。ただし、現実の試料では、位相コヒーレンス長  $l_\phi$  で波動の連続性が絶たれてしまうので、平均化が生じてしまう。

このゆらぎの普遍性が理論的に証明されているのは、伝導が拡散的 (diffusive) な場合である。すなわち、弾道的な伝導とは対照的に、電子は不純物によって非常に多数回の弾性散乱を受け、拡散方程式に従うような伝播をする。この場合、平均自由行程を  $l$ 、試料の長さを  $L$  とすると、伝導チャネルの概数が  $N$  あったとしても、試料中を伝播する際に  $l/L$  程度の散乱を受けるため、伝導度は

$$G \sim \frac{2e^2}{h} N \frac{l}{L} \quad (46)$$

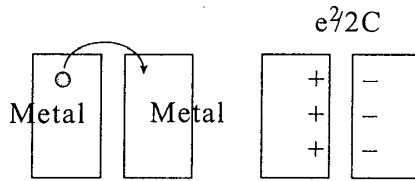
程度に小さくなる。

恐らく、ゆらぎの大きさに関しては、拡散的伝導から弾道的伝導まで連続的に変化してもそれ程大きな変化はないものと考えられる。ゆらぎが普遍的になる物理的な説明は、様々な視点から行われているが、ここでは拡散領域で、Landauer 公式を使用する考え方を (一部天下りながら) 紹介する。多チャネルの Landauer 公式で、伝導体中のチャネル数を  $N$ 、また簡単のため入出力のチャネル数も  $N$  とすると、規格化定数を除けば、AB 効果を  $N$  チャネルに一般化して

$$T_{ij} \propto \sum_{m \neq n}^N 1 + \sum_{m \neq n} e^{i(\phi_m - \phi_n)} \quad (47)$$

となる。右辺第 1 項が古典項、第 2 項が干渉項にあたる。第 1 項は  $N$  個の項の和であるのに対し、第 2 項は  $N C_2 \sim N^2$  個の項の和である。干渉項は位相がランダム

図 16: 単電子帯電効果の概念図. 1 個の電子のトンネルにより, 静電エネルギー  $E_c \equiv e^2/2C$  が増加.



であるから平均すれば消えてしまう. しかし,  $N^2$  個の項の和であることから, ゆらぎは大きく, 絶対値の平均は  $O(N)$  となって, 古典項と同程度の寄与があることになる.

問題は, 独立な  $T_{ij}$  がどの程度あるか, である. 単純に考えると, 全チャネルに電子波が等分されるので  $N^2$  個の同等な  $T_{ij}$  があり, このため,  $G$  は  $N$  のゆらぎを持つものを  $N^2$  個集めたものであるから,

$$\sqrt{(\Delta G)^2}/G \sim 1/N$$

であるように思われる. しかし実際には, アンダーソン局在の効果により, 試料が十分に長い時には多くの  $T_{ij}$  は消えてしまう. これは, ループを描いて戻る経路の影響であり, (47) には含まれていない. これを取り入れると, 試料の端まで 1 に近い透過率を持つ  $T_{ij}$  はほとんど  $Nl/L$  になってしまう<sup>2</sup>. 従ってゆらぎの大きさは上の式で,  $N$  を  $Nl/L$  で置き換え, (46) を用いると,

$$\sqrt{(\Delta G)^2} \sim (2e^2/h) \quad (48)$$

となる.

## §5 単電子トンネル

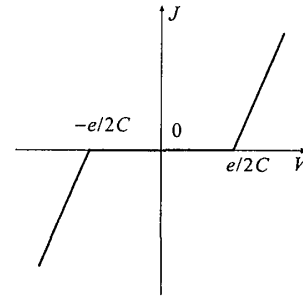
### §5.1 単電子帯電効果と電源

次は, 量子ドットの番である. 量子ドットを考える時に, 重要になるのが, 冒頭でも述べた運動エネルギー準位の離散化と帯電効果である. ここでは, まず, 帯電効果について一通りの準備をした上で, 量子ドットの伝導を調べる際の典型的な系, 単電子トランジスタについて調べてみよう.

図 16 のような静電容量  $C$  のトンネル接合を考えよう. 1 個の電子がトンネルすると, この系は, 静電エネルギー  $E_c \equiv e^2/2C$  だけエネルギーが高くなってしまふ. この

<sup>2</sup>紙数の関係でここは天降りになった. なぜ  $Nl/L$  個かという議論は, 例えば文献 10 にある.

図 17: 微小トンネル接合を定電圧電源で駆動した時に, 電源の仕事を見無視した場合に期待される電流電圧特性



ため,  $E_c$  が熱揺らぎ等の擾乱に対して十分大きければ, 電子のトンネルは禁止される. これを, クーロン・ブロッケード (Coulomb blockade) と呼ぶ.

#### 定電圧電源の場合

左右の電極に電圧  $V$  がかかっている場合には, 事情が変わり, トンネルに伴う静電エネルギーの変化は

$$\Delta E = E_c \pm eV = e \left( \frac{e}{2C} \pm V \right) \quad (49)$$

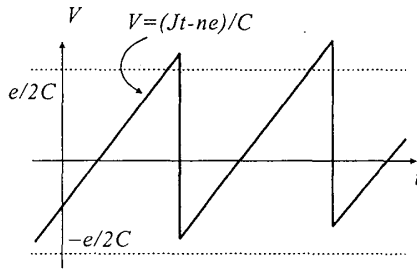
となる.  $eV$  の前についた符号はトンネルと電圧の向きに依存する.  $\Delta E$  が零を切る電圧から電流が流れ始めると考えると, 図 17 のように,  $V = E_c/e$  のところから電流が流れ始める IV 特性が期待される.

しかし, 話はもうちょっと面倒である. これは QPC のところでも述べたことだが, どのような電源が接合に接続されているかで, ふるまいは大きく異なる. 上の話では接合の電圧を指定していたので, 電圧を固定する定電圧電源を接続したとしよう. すると, 電子 1 個のトンネルが仮想的に起こったとして, 理想的な定電圧電源は, トンネルによる電極の電荷の増減を直ちに補償するため, クーロン・ブロッケードそのものが起こらなくなってしまふ. これは, 「理想的な定電圧電源」の回路的なモデルが, 容量無限大のコンデンサであることを考えれば当然である. 無限大の  $C$  が並列につながったとすると, 有効的な  $E_c$  は零になってしまい, クーロン・ブロッケードは消える.

#### 定電流電源の場合

単一接合の場合は, 以上のことから, 定電流電源で駆動することを考えるのが現実的である. 定電流電源で駆動すると, 一定の割合で電極に電荷が流し込まれる. こ

図 18: SET 振動の様子の模式図. 時間に対して接合の電圧変動の様子を描いたもの.



のためコンデンサの電圧は時間変化する. 電流を  $J$  とすると, 単位時間あたりの電圧変化は  $\Delta V = J/C$  である. 零電圧から変化が始まったとして, 電圧が  $E_c/e$  に達すると電子 1 個がある確率でトンネルし, トンネルに伴って電圧は瞬間的に  $e/C = 2E_c/e$  だけ減少する. ここを起点にまた電圧変化が始まり, 結局図のように電圧は三角波形を描くよう変化する. これを単電子トンネル (Single-Electron Tunneling, SET) 振動と呼ぶ. SET 振動の周波数は, 簡単に  $J/e$  である.

電荷  $e/2$  で直ちにトンネルが起これば, SET 振動は完全にレギュラーになる. しかし, 図にも示したように, トンネルはあくまで stochastic な過程であるので, 電荷が  $e/2$  に達した後, トンネルが起こるまでに random な時間遅れがあり, これが, SET 振動に幅を与えている. もしこの幅がなければ, 定電流電源で駆動した時の接合の平均電圧は零であり, トンネル確率無限大, トンネル抵抗零の場合に対応する. 有限なトンネル抵抗がある場合の IV 特性を考える.  $e/2$  よりも  $\Delta q$  だけ電荷がたまった状態は, トンネル後に比べて静電エネルギーが  $e\Delta q/C = eJt/C$  だけ高い. ここで,  $J$  は電流,  $t$  は電荷が  $e/2$  に達した時を原点とする時間である. 今, 系がトンネル前の状態にある, という確率 (状態) を  $y$  とおく.  $y$  の崩壊時間を  $\tau$  とすると,  $y \propto \exp(-t/\tau)$  より,

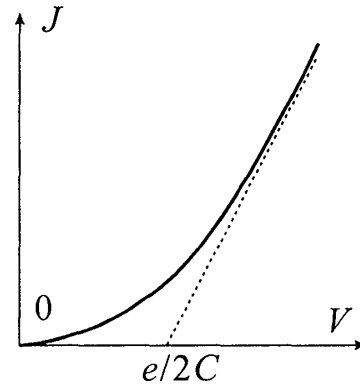
$$-\frac{1}{\tau} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$$

である. 一方, 障壁の透過確率を  $T$  とすると, 不確定性による状態の崩壊時間  $\tau$  は

$$\tau \Delta E \sim \hbar/T$$

から求められる. (39) より接合のトンネル抵抗  $R$  が十分  $R_q$  より大きければ,  $T \sim R_q/R$  と近似できるだろう. 以上から,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -\frac{eJR_q}{\hbar CR} t$$

図 19: 微小トンネル接合を定電流電源で駆動した際に期待される電流電圧特性.  $V \geq 0$  の領域に限った.

である. 境界条件  $t = 0$  で  $y = 1$  より,

$$y = \exp - \left( \frac{2J}{eCR} \right) t^2 \quad (50)$$

となり,  $t = 0$  よりトンネルするまでの平均時間  $\tau_{av}$  は  $\sqrt{eCR/8JR_q}$  である. 従って接合に発生している平均の電圧  $V_{av}$  は  $J\tau_{av}/C$  であることから,  $J$  を  $V_{av}$  で表すような形式に書くと,

$$J = \frac{8C}{eR} V_{av}^2 \quad (51)$$

が得られる. これが, 零電圧付近のふるまいである.  $V_{av}$  が  $E_c/e$  を超えると, SET 振動の不規則性が増大し, 駆動電源による差が小さくなって, 図 17 の IV 特性に漸近するであろう. 以上から, 図 19 のような IV 特性となることがわかった.

#### クーロン・ブロックードが現れる条件

以上から, 定電流駆動さえできれば, 図 17 のような明瞭なものではないものの, クーロン・ブロックードが観測できるように思える. ところが, 実験ではこれが意外に困難である. 微細加工で得られる微小トンネル接合の典型的な静電容量は fF ( $10^{-15}$  F) のオーダーであるが, これでも  $E_c$  は温度に直して 1K 前後であるから, 必然的に低温の実験が必要である. ところが, 低温実験のためには, 熱流入を防止するため長い導線を使用する必要があり, これは極めて大きな浮遊容量を持つ. このため, 物理的に定電流電源と呼べるような応答の速い定電流駆動は, 実際には不可能である.

そこで, 実験では, 微小接合のできる限り近傍に高い抵抗を挿入して浮遊容量や, 導線から混入するノイズを

避ける手法が取られる。この時、どの程度の抵抗を挿入すれば良いか？この事情を、定電圧電源と接合との間に有限な電気抵抗  $R$  を入れることで表現してみよう。トンネルによって帯電したコンデンサが抵抗を通して放電するまでの時間は、回路の時定数  $RC$  である。トンネル直後は接合のエネルギーは  $E_c$  だけ上昇しているが、時間とエネルギーの不確定性関係から、 $\hbar/E_c$  程度の時間仮想状態として存在することが許される。 $RC$  がこれより十分短ければこの中間状態を通してのトンネルが可能である。 $RC \ll \hbar/E_c = 2\hbar C/e^2$  を書き換えると

$$R \ll \frac{\hbar}{e^2} = R_q \quad (52)$$

という関係が得られる。2 は省略した。逆に、トンネルを禁止してクーロン・ブロッケードを出現させたいければ、 $R_q$  よりも大きな抵抗を挿入する必要がある、ということになる。

さて、上の抵抗の境界値の導出では、接合特有の量であった  $C$  が消えてユニバーサルな関係式となっている。これと、ランダウアー公式の導出との類似に注意して欲しい。単電子帯電効果は、次節で見るように、外部からの電子の付加・抜き取りに対するエネルギー準位（付加スペクトル）を離散化する。そのエネルギー間隔は  $2E_c = e^2/C$  である。これは、1次元空間での閉じ込めにおいて、運動エネルギーの離散準位間隔が  $1/L$  に比例したことに対応している。Landauer 公式で  $L$  が消えてしまった理由は、 $\hbar$  と  $L$  との不確定性の定数が  $\hbar$  で決まっていたことだったが、今の場合も、 $\hbar$  と  $E$  とで同じことが生じているために他ならない。

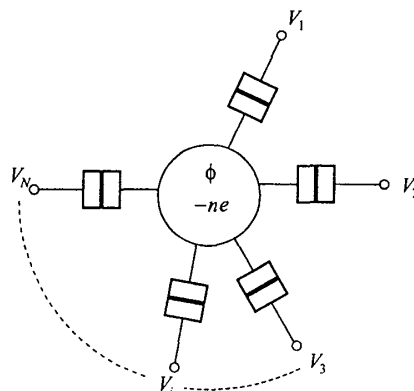
## §5.2 単電子トランジスタ

次に、微小トンネル接合を2個直列にした単電子トランジスタ構造について見ていこう。これは、最初に出てきた2重障壁構造で、 $yz$  方向の運動の自由度を制限して1次元的にしたもの、と捉えることもできる。あるいは、量子細線中に2重障壁を導入した、と考えても良い。

### クーロン島

図20のように、孤立したドットを考える<sup>12)</sup>。ドットはトンネル接合  $1, 2, \dots, N$ （静電容量  $C_1, C_2, \dots, C_N$ ）を介して、定電圧電源  $V_i (i = 1, 2, \dots, N)$  に接続されている。このように、トンネル接合で周囲環境と隔てられた金属をクーロン島 (Coulomb island) と呼ぶ。また、ドット上の余剰電子（電気的中性から余分に付け加わった電

図 20: クーロン島



子) 数を  $n$  とする。この時、ドットの電位を  $\phi$  とすると、

$$\phi = \frac{1}{C_s} \left( \sum_{i=1}^N C_i V_i - ne \right) \quad (53)$$

である。ただし、 $C_s \equiv \sum_{i=1}^N C_i$  である。この系の接合に溜まっている静電エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_i (V_i - \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2C_s} \sum_i \sum_{j>i} C_i C_j (V_i - V_j)^2 + \frac{(ne)^2}{2C_s} \end{aligned} \quad (54)$$

と計算される。

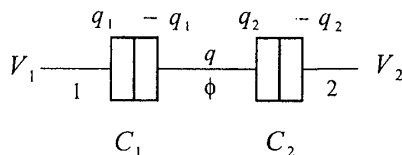
しかし、この変化だけ考えていては、実際にトンネルが可能であるかどうかということとはわからない、ということを前節で電源の仕事の問題として述べた。これを判断するためには、一体何の「損得」を勘定すれば良いか？この時参考になるのは、地上での気体の定圧変化などを扱う際に考えるエンタルピー (enthalpy) である。エンタルピーは、大気が一定圧力を保つために自動的に補償してくれる仕事を、系のエネルギーからあらかじめ差し引いておくものであった。これと同様に、各電源が電子のトンネルの際にどのような仕事をするかを調べ、(54) からあらかじめ差し引いて考える。

例えば、 $j$  番目のトンネル接合を通して電子がトンネルしてクーロン島に入る過程を考える。 $\phi$  が  $-e/C_s$  だけ変化することから、 $i (i \neq j)$  の電源の仕事は、

$$\Delta q_i V_i = \Delta(V_i - \phi) V_i = e V_i C_i / C_s$$

である。 $j$  の電源は、これの他にトンネルした電子の補償も必要であるから、これに  $-eV_j$  を加えた仕事をする。

図 21: トンネル接合の直列接続 長方形を2個つなげた記号は、コンデンサであると同時にトンネル伝導もあるトンネル接合を表す。



全体として

$$W_j = e \sum_i (V_i - V_j) \frac{C_i}{C_s} \quad (55)$$

だけの仕事が生供給される。

### 単電子トランジスタ構造

最も簡単な例として、図 21 のようにトンネル接合を2個直列に接続する。接合容量を  $C_1$ ,  $C_2$ , とする。左右の導線(電極)は、電圧  $V_1$ ,  $V_2$  の定電圧電源に接続し、電源の基準をアースに取ると、左右電極の電位は  $V_1$ ,  $V_2$  に固定される。トンネル接合に挟まれたクーロン島に  $q$  の電荷を帯電させる。以上の条件の下でクーロン島の電位  $\phi$  を求めてみよう。

2つのコンデンサの極板に溜まった電荷はそれぞれ  $q_1 = C_1(V_1 - \phi)$ ,  $q_2 = C_2(\phi - V_2)$  である。 $q = q_2 - q_1$  でなければならないから、この式に前の2つを代入して

$$\phi = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2 + q}{C_1 + C_2} \quad (56)$$

と求められ、これから  $q_1$ ,  $q_2$  も求まる。静電エネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} \right) = \frac{1}{2C_s} (C_1 C_2 V^2 + q^2) \quad (57)$$

となる。ただし、 $C_s \equiv C_1 + C_2$  である。

$q$  として具体的に  $n$  個の電子の電荷とすると、 $q = -ne$  である<sup>3</sup>。したがって、1個の電子が接合をトンネルしてクーロン島から逃げ出したとすると  $U$  の変化は

$$\Delta U = U(n-1) - U(n) = \frac{(1-2n)e^2}{2C_s} \quad (58)$$

である。ここで、「静電エネルギーの変化に対して電源が素早く対応してカバーする」という状況を取り入れよう。(56) より、 $\phi$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  の変化はそれぞれ、 $\Delta\phi = e/C_s$ ,  $\Delta q_1 = -e(C_1/C_s)$ ,  $\Delta q_2 = e(C_2/C_s)$  である。トンネル

<sup>3</sup>電子の電荷の符号を明示するため、ここでは  $e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 、電子1個の電荷は  $-e$  としている。

が接合1を通して起こったとする。電源2のする仕事は  $-\Delta q_2$  の電荷を供給することだが、電源1はトンネルした電子による電極の電荷の変化分も供給する必要がある。この2つの仕事は

$$W_2 = -\Delta q_2 V_2 = -\frac{e C_2 V_2}{C_s} \\ W_1 = \Delta q_1 V_1 + e V_1 = \left(1 - \frac{C_1}{C_s}\right) e V_1 = \frac{e C_2 V_1}{C_s} \quad (59)$$

である。簡単のため、 $V_1 = V/2$ ,  $V_2 = -V/2$  と対称的に電位を取ることにしよう。単一の接合の場合は、 $W_1$ ,  $W_2$  が  $\Delta U$  をカバーしていたが、今度は

$$\Delta \mathcal{E}_{1\leftarrow} \equiv \Delta U - W_1 - W_2 = \frac{e}{C_s} \left[ e \left( \frac{1}{2} - n \right) - C_2 V \right]$$

となる。下付きの矢印はトンネルの向きを示している。 $n=0$ ,  $V=0$  とすると、 $e^2/2C_s$  という有限のエネルギーが残る、クーロン・ブロッケードが発生しうることがわかる。電子が電極2からトンネルで接合2を抜けてクーロン島に入る時のエネルギー変化も同様に

$$\Delta \mathcal{E}_{2\leftarrow} = \frac{e}{C_s} \left[ e \left( n + \frac{1}{2} \right) - C_1 V \right] \quad (60)$$

となる。

クーロン島に3つめのコンデンサを取り付ける。このコンデンサは障壁が厚く、トンネルはできないとしよう。容量を  $C_g$  とする。こうしてできた3番目の電極を“ゲート”と呼ぶ。これに対し、電極1,2を“ソース”, “ドレイン”と呼ぶ。また、このような構造の素子を、単電子トランジスタ (single-electron transistor, SET) と呼ぶ。ゲートを定電圧電源につないで電位を  $V_g$  に保つとしよう。この場合は、

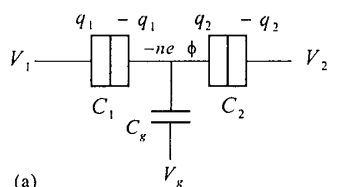
$$\Delta \mathcal{E}_{1\leftarrow} = \frac{e}{C_\Sigma} \left[ e \left( \frac{1}{2} - n \right) - \left( C_2 + \frac{C_g}{2} \right) V + C_g V_g \right] \\ \Delta \mathcal{E}_{2\leftarrow} = \frac{e}{C_\Sigma} \left[ e \left( n + \frac{1}{2} \right) - \left( C_1 + \frac{C_g}{2} \right) V - C_g V_g \right] \quad (61)$$

ただし、 $C_\Sigma \equiv C_s + C_g$ 。同様に、 $\Delta \mathcal{E}_{1,2\rightarrow}$  は電極を入れ替えるだけなので容易に求まる。

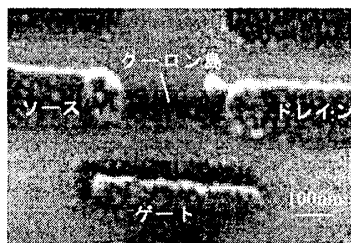
横軸に  $V_g$ , 縦軸に  $V$  をとった座標系で見てみよう。まず初期状態を  $n=0$  とする。 $\Delta \mathcal{E}_{1\leftarrow} \geq 0$  という条件は、図 23(a) で影をつけた半平面を表し、この領域では、 $n=0$  から  $n=1$  へ向けて接合1をトンネルする過程はブロックされる。同様に、 $\Delta \mathcal{E}_{1,2\rightarrow} \geq 0$  の条件は、対応するトンネル過程が静電エネルギーの増加によってブロックされることと対応する。この4つの条件の境界線をまとめて描くと図 23(b) のようになり、4条件をすべて満たす領



図 22: 単電子トランジスタ (a) 等価回路図. 図 21 にゲート電極を加えたもの. (b) アルミニウム薄膜で作製した SET の電子顕微鏡写真.



(a)



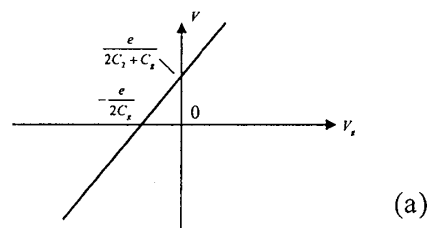
(b)

域は、影をつけた平行四辺形の内部である。この影の領域では、トンネルは禁止され、 $n=0$  が保たれる。 $n=1$  について同じ事を見てみると、この平行四辺形は  $n=0$  のものとぴったり接していることがわかる。同様に一般の  $n$  についても平行四辺形が求まり、図 23(c) のように平行四辺形が並んだ図が得られる。

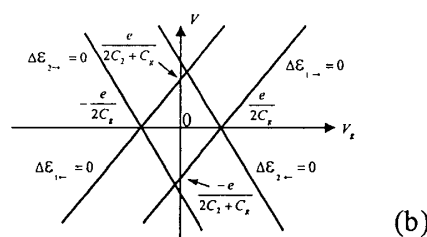
実験結果をお目にかけよう。図 22 のような構造は、例えば LSI を製造するのに使う微細加工技術を使うことで作製することができる。図 22(b) はアルミニウムのトンネル接合で作製した SET の電子顕微鏡写真、(b) は実験データで、横軸に  $V$ 、縦軸に素子を通る電流をとっている。曲線が沢山あるのは、 $V_g$  を少しずつ変化させてとったデータを、縦方向にずらして描いているためである。まず、一つ一つの曲線が、図 17 のように、クーロン・ブロックード効果を示していることがわかる。更に、よく見ると、ブロックードを示す領域が、破線で示したように平行四辺形が並んだ格好をしている。これが上で計算した影の付いた平行四辺形に他ならない。

さて、図 23 に戻って、平行四辺形の並んでいる頂点付近（破線の丸をつけた部分）に注目すると、頂点ではトンネルが許される。 $V$  を非常に小さくして固定し、 $V_g$  を掃引して測定すると、この付近では、電流がピークとして現れる。このようなトンネル電流の振動をクーロン振動と呼ぶ。図 25 は図 22(b) の試料で測定されたクーロン振動である。振動のピークの間では、クーロン島の電子数は確定し、ピークを一つ乗り越えるたびに、電子数

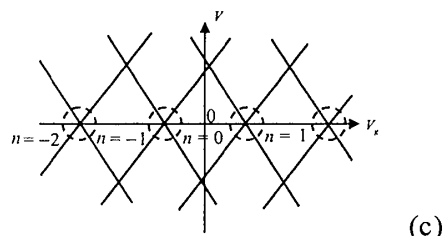
図 23: クーロン・ブロックードが起こる条件 SET 構造で、(a)  $n=0$  で  $\Delta\mathcal{E}_{1,-} > 0$  の領域. (b)  $n=0$  でトンネルがすべて禁止される領域. (c) 様々な  $n$  について、ブロックードが起こる領域.



(a)



(b)



(c)

図 24: SET の電流電圧特性の実験結果 ゲート電圧を 0.2mV づつ変化させ、ソース・ドレイン電圧 ( $V$ ) に対して電流を測定したもの。点線で示した平行四辺形が、図 23 の影をつけた平行四辺形に対応する。測定温度は 0.03K.

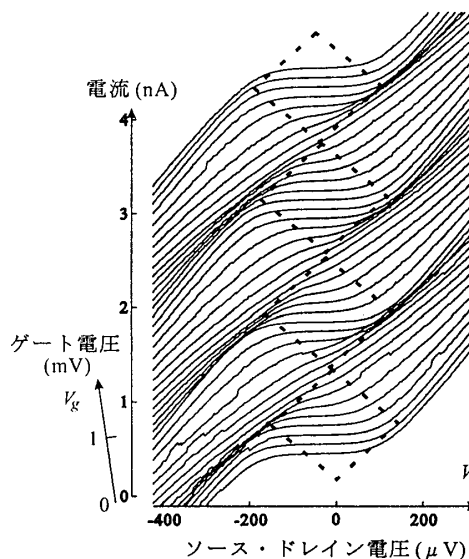
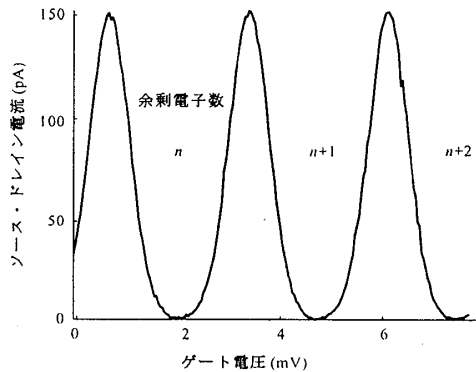


図 25: クーロン振動 図 22 の試料で, ソース・ドレイン電圧を  $20\mu\text{V}$  に固定して, ゲート電圧を掃引して電流を測定したもの. 測定温度は  $0.03\text{K}$ .



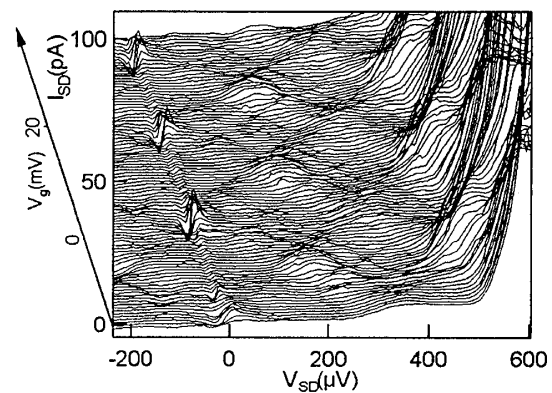
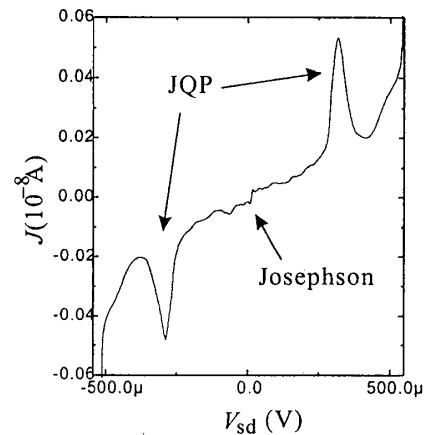
は 1 個ずつ増加する. このように電子数を 1 つずつ勘定できることから単電子トランジスタの名前が冠された.

### §5.3 超伝導単電子トランジスタ

「超伝導」は, 電子の波動性が非常に大きなスケールで現れ, 電子が「波である」ということを強烈に印象付ける. その仕組みは, 電子間に弱い引力が働くことと, 電子がフェルミオンであることによる, 全波動関数の反対称性から, すべてのクーパ対の位相が揃ってしまうことにある. この量子力学的「波」の性質が強く現れる超伝導を, 「粒子」としての性質が強く現れる単電子トンネル回路に持ちこめば, 量子力学の相補性を端的に示す様々な現象が現れることが期待される. 実際, この系は, そのような効果の実験系の代表として長年研究されてきた.

この系が実験の対象として重要視される理由は, 超伝導が上述のような機構でたくさんの電子の自由度を束ねて生じた新しい「マクロな自由度」を持つものであるからである. マクロな自由度の最も単純な例は, マクロな剛体の重心座標の自由度である. マクロな剛体は多数の原子から成っているが, その運動を記述する際には重心座標と回転の自由度のみ考えれば良い (勿論, 剛体からのゆらぎはあり, これは十分硬ければフォノンで記述される). このようなマクロな自由度を量子力学的にどのように扱うかは, 基礎物理学の重要な課題である. すると, その実験のためにはマクロな自由度に量子力学的ゆらぎを発生させる必要がある. そのような系の代表が超伝導単電子トンネル回路であり, ゆらぎを発生させるしかが単電子帯電効果である.

図 26: SSET のソースドレイン IV 特性の例



### §6 超伝導単電子トランジスタ

まず, 超伝導単電子トランジスタ (SSET) を考える. 超伝導単電子箱などは, その変形として取り扱える. 実験で得られた SSET の典型的なソース・ドレイン IV 特性を図 26 に掲げる.

ここで特徴的なことをあげると、

1. クーロンブロッケードと超伝導ギャップが足し合わされたブロッケード領域
2. 零バイアス付近の電流ピーク (Josephson 電流)
3. ブロッケード内にある電流ピーク (JQP)

である。以下これらの特徴について、順次 (順番は若干変わるが) 説明する。

### §6.1 零バイアスでの Josephson 電流

零バイアスの問題は、系が平衡状態にあることから、ハミルトニアン形式で扱うことができる。以下、一通り復習しよう。系のハミルトニアンを単純化して

$$H = -E_1 \cos \varphi_1 - E_2 \cos \varphi_2 + \frac{(Q - Q_0)^2}{2C_\Sigma} \quad (62)$$

とする。\$E\_{1,2}\$ は左右の Josephson 接合の Josephson エネルギー、\$\varphi\_{1,2}\$ は左右の接合の位相差、\$Q, Q\_0\$ はそれぞれ、クーロン島、ゲートの電荷、\$C\_\Sigma\$ は SSET のトータルな容量である。

位相差について 1 次変換

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi &= (\varphi_1 - \varphi_2)/2 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

を施すと、

$$H = -E_J(\theta) \cos(\varphi - \chi) + \frac{(Q - Q_0)^2}{2C_\Sigma} \quad (64)$$

と書き換えられる。ただし

$$\begin{aligned} E_J(\theta) &\equiv (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \theta)^{1/2}, \\ \chi &\equiv \tan^{-1} \left[ \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \tan \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (65)$$

である。\$\chi\$ は一種の参照位相であり零と置くことができる。するとこれは 1 個の接合の場合と形式的に同じであり、1 個の接合で見られた粒子性 (単一電子帯電効果) と波動性 (超伝導 Josephson 効果) の攻めぎ合いが現れると期待される。しかし、大きな違いは、左右電極の粒子数ゆらぎが許されているため、クーロン島の超伝導と電極の超伝導が位相ゆらぎのためにコヒーレントでない場合でも、電極の間はコヒーレントになりうる、という点である。

さて、(64) は位相変数 \$\theta\$ と電荷 \$Q\$ が混じって書かれているが、帯電エネルギーが Josephson エネルギーに比べて十分大きく、クーロン島上のクーバー対の数 \$N\$ が帯電効果によって固定され良い量子数となっている場合

の微小接合系ではハミルトニアンを粒子数空間へ変換した「粒子数表示」が便利になる。これは \$N\$ の状態を \$|N\rangle\$ と書いて、\$N\$ が一つ離れた状態へ非対角要素のみ考慮すれば、

$$H = -\frac{E_J}{2} \sum_N \{ |N+1\rangle \langle N| + |N-1\rangle \langle N| \} + E_c \left( 2N - \frac{Q_0}{e} \right)^2 \quad (66)$$

と書くことができる。\$N\$ に 2 がついているのは、クーバー対の電荷が \$2e\$ であることを反映している。ここで帯電エネルギー \$E\_c = e^2/C\_\Sigma\$ である。すなわち \$N\$ 表示では、\$H\$ は対角要素が \$E\_c(2N - Q\_0/e)^2\$ でひとつだけずれた非対角要素が \$-E\_J/2\$ の行列で表示される。

今、\$E\_J \ll E\_c\$ の場合を考えると、\$(E\_J/E\_c)\$ をパラメタとして、摂動で (66) の固有値を求めることができる。(66) は形式的には、メインの第 2 項は各 \$N\$ に対してパラボリックなバンドが属した格好をしており、第 1 項がバンド間の混じりである。従ってバンドが交差し縮退する部分でこの項による準位間反発が起こり、その近傍ではエネルギー固有値は、

$$E_N = E_c \left\{ \frac{(2N - Q_0/e)^2 + (2N + 2 - Q_0/e)^2}{2} \pm 2 \left[ (2N + 1 - Q_0/e)^2 + \left( \frac{E_J}{4E_c} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (67)$$

となる。これより超伝導電流 \$J\_s\$ は、

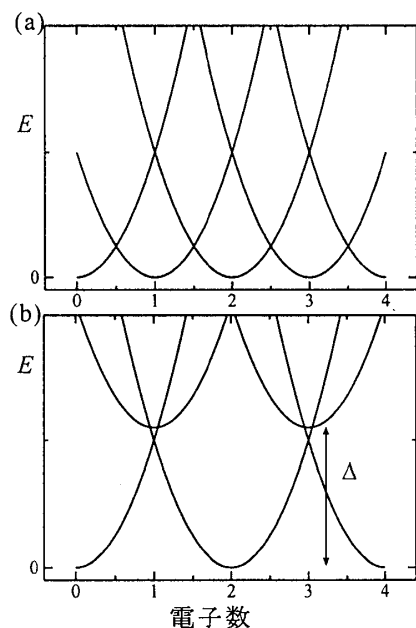
$$\begin{aligned} J_s &= \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \theta} \\ &= \frac{2e}{\hbar} \frac{E_1 E_2}{8E_c} \frac{\sin \theta}{\sqrt{(2N + 1 - Q_0/e)^2 + (E_J/4E_c)^2}} \end{aligned} \quad (68)$$

となり、ゲートの電荷 \$Q\_0\$ によりコントロール可能であることがわかる。最大値最小値はそれぞれ、

$$J_s = \begin{cases} \frac{2e}{\hbar} \frac{E_1 E_2}{2E_J} \sin \theta & (\text{Max.}) \\ \frac{2e}{\hbar} \frac{E_1 E_2}{4E_c} \sin \theta & (\text{Min.}) \end{cases} \quad (69)$$

となる。\$E\_1 = E\_2\$ の場合は、Max. の方は、\$J\_s = (2e/\hbar)(E\_1/2) \sin(\theta/2)\$ となり、最大超伝導電流は完全にコヒーレントな場合の 1/2 である。これは、クーロン島のクーバー対数のゆらぎが 1 以内に押さえられている、と仮定しているためである。また、Min. の方は

図 27: SET の帯電エネルギー曲線群. (a) 常伝導状態 (b) 超伝導状態.



$J_s \approx (2e/\hbar)(E_1 E_2 / 4E_c) \times \sin \theta$  となり,  $E_c$  によって押さえられる.

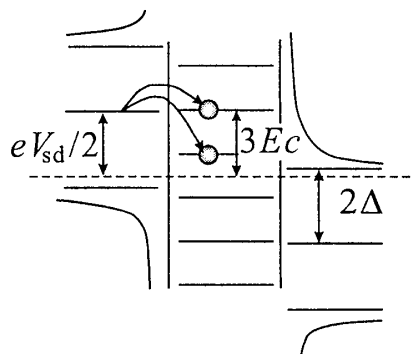
この内, 前者については実験では超伝導電流が流れている際は  $N$  の揺らぎが 1 以内であるという仮定が破れてしまい, ほとんどコヒーレントな場合と同じ最大超伝導電流が流れることが報告されている<sup>13)</sup>. ただし, 微小接合においてはコヒーレントな電流は外部環境に対して極めて敏感であり, 実験ではむしろ, 所望の値が得られないことが多い. 一方, Min. の場合については,  $E_J$  が大きい場合はクーロン振動の振幅が小さく,  $E_c$  が大きい場合は極めて大きなピーク対谷の比が得られており, 実験においてもこの効果は定性的には良く確かめられている.

## §6.2 パリティ効果

零バイアス超伝導電流でもう一つ特徴的なことは, (68) にも現れているように, クーロン振動のピーク間隔がゲート電圧で  $2e/C_g$  ( $C_g$  はゲート容量) と, 常伝導の場合の 2 倍になっていることである. ただし, (68) は単純にクーパー対の電荷が  $2e$  であることを反映しているに過ぎないが, 実際にはもう少し微妙なことが起こる.

常伝導状態では図 27(a) のように電子数状態に対応するパラボラが同じ高さで並んでおり, その交点が縮退を表しクーロン振動のピークである. 超伝導状態では奇数の

図 28: 離散エネルギー準位モデル.



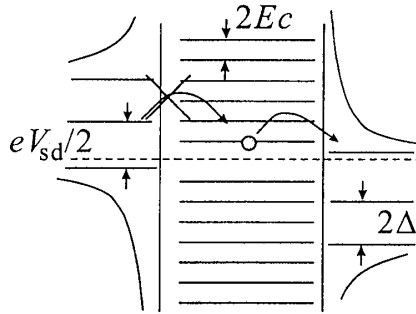
電子数状態に対応するパラボラが超伝導エネルギーギャップ  $\Delta$  だけ高くなるので, 2つの交点が接近し, あるところで図 27(b) のように偶数の電子数状態の交点よりも奇数電子数状態のパラボラの底が高くなって周期が完全に倍になる. 実際にこのような様子は実験で明瞭に観測されている<sup>14)</sup>. この効果は, クーロン島の電子数の偶奇を区別していることになり, パリティ効果と呼ばれる.

## §6.3 JQP サイクルによる電流ピーク

JQP (Josephson-QuasiParticle) サイクルは, 単純には 2 つの Josephson 接合のうち, 一方をコヒーレントな Josephson 効果で抜け, もう一方を準粒子電流として抜けるというサイクルである. ただし, これにはいくつもの高次のサイクルが考えられる上に, 準粒子の状態密度はギャップ端付近に大きな極大 (最もシンプルな BCS 理論では発散) を持っているため, 図 26 のように, ギャップ内には実は非常に細かな構造が無数に現れている<sup>15)</sup>. ここでは最も単純な JQP サイクルについて説明しよう.

ここでは図 28 のようにクーロン島に帯電効果によって離散的なエネルギー準位 (多電子) ができているというモデルが便利である. 今,  $V_g = 0$  とすると,  $eV_{sd} = 3E_c$  の時はクーロン島に過剰電子を 1 個含むことから, クーパー対が左の電極からクーロン島に出入りしても丁度見かけ上図 28 のように 2 つの準位に電子を詰めるような形になり, エネルギーは変化しない. これは右側も同じである. 従って一種の Josephson 結合によってクーパー対のトンネルが起こる. これが通常の Josephson 効果と異なる点は, ソースドレイン電圧がかかっているため, 最終的に電流を運ぶためには, どこかでこの電圧分のエネルギーを消費しなければならないことである. もっとも簡単な方法は, 右の接合を準粒子として抜けることであ

図 29: JQP サイクルの衰退



るが、これには  $2\Delta$  分のエネルギーが必要となる。従って、 $3E_c > 2\Delta$  であれば JQP サイクルが成立する。

しかし、現実の実験条件では  $E_c$  をこれほど大きくすることは容易ではない。上記条件が満たされない場合には、 $2\Delta$  よりもエネルギーの高いところにクーパー対がエネルギーロスなしにトンネルできるところまで  $V_{sd}$  を上げるとサイクルが可能になる。この条件は  $2\Delta/e + |ne - C_g V_g|/(2C_\Sigma)$  で  $V_g$  に依存するが、最大で  $2\Delta/e + e/(2C_\Sigma)$  である。 $V_{sd}$  がこれより大きくなると、一見クーパー対の共鳴の条件が失われるので電流が流れなくなるように思われるが、共鳴条件から外れても、一種の AC Josephson 効果でクーパー対の出入りが続くとクーパー対が入っている時に準粒子で飛び出すサイクルは生き残り、電流が流れつづける。 $V_{sd}$  が更に大きくなって更に下の状態からもギャップを超えてトンネルが可能になると、図 29 のようにクーロン島の電荷が  $e$  だけ減ってしまい、共鳴条件は満たされなくなる。この電流が流れなくなる電圧はやはり  $V_g$  に依存し、 $2\Delta/e + |ne + 3e - C_g V_g|/(2C_\Sigma)$  で、最大で  $2\Delta/e + 3e/(2C_\Sigma)$  である。以上が、JQP サイクルによる電流がピークとなる説明である。

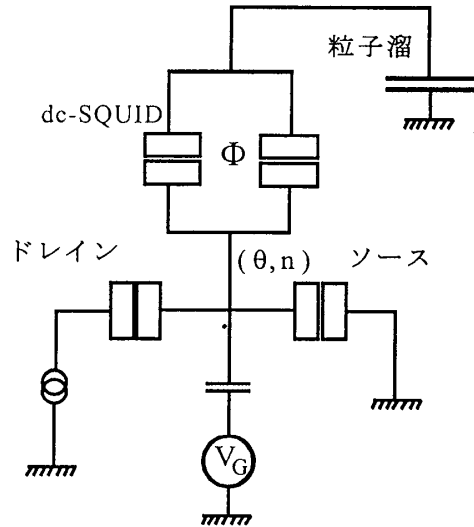
## §7 SSET を使った実験

次に、以上のような特性を持った SSET を使った様々な実験を紹介しよう。

### §7.1 クーロン島の位相/粒子数の不確定性

(63) の変換を行った後では、クーロン島に一種の「位相」 $\varphi$  を定義できる。 $\varphi$  と  $N$  とは量子力学的に正準な関係にあり、不確定性関係

$$\Delta\varphi\Delta N > 1/2 \quad (70)$$

図 30: Elion ら<sup>16)</sup> の実験のセットアップ。

が成立する。注目すべきは本稿冒頭でも述べたように、 $\varphi$ ,  $N$  がマクロな変数と考えることで、これらの間に量子力学がミクロ変数と基本的には同じ形で成立しているかどうかを調べることができる形となっていることである。

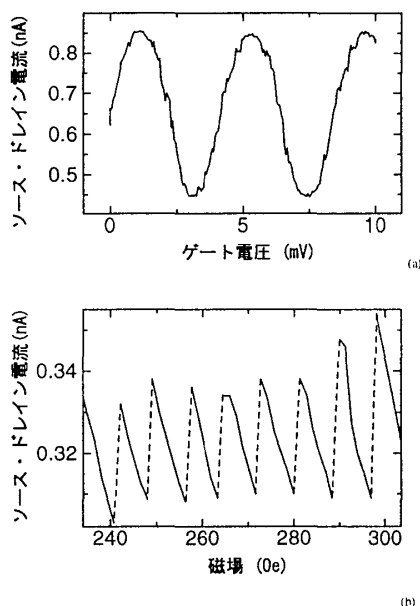
ただし、残念ながらこれを調べるのに有効な手段は、現在のところ零バイアス超伝導電流を定量的に調べるしかない<sup>14)</sup>。

Elion らは、図 30 のようなセットアップにより実験を行い、これを検証したとしている<sup>16)</sup>。これは、クーロン島と大きな粒子溜めを dc-SQUID で結んで全体に磁場をかけて dc-SQUID を ON/OFF し、クーロン島の粒子数ゆらぎを制御することによって位相ゆらぎを制御し、これにより SSET 全体に流れる最大超伝導電流を制御した、というものである。一見定性的に (70) を検証したようであるが、実は粒子溜めとの抵抗を減少させることで有効な帯電エネルギーを制御して  $J_c$  を制御したにすぎない。勿論、同様な実験は、dc-SQUID の代わりにもう一つの SSET を配することにより行うことができる<sup>17)</sup>。これでも同様に、第 2 の SSET の ON/OFF により第 1 の SSET の超伝導電流が制御できるという結果が得られた。

### §7.2 クーロン島の超伝導状態

以上のような実験から、「クーロン島の位相」 $\varphi$  が大きくゆらいでいる、というステートメントが得られると、「では位相がコヒーレントであることから生じている様々

図 31: 同時に現われる (a) クーロン振動と (b) フラクソイド量子化によるソースドレイン電流の振動.



な特性, 例えば磁束 (厳密に言うとフラクソイド) の量子化に影響が現われるのではないかと懸念を持つむきもあろうが,  $\varphi$  のゆらぎはあくまで「参照位相」を決めた上で意味のあるものであり, クーロン島内のコヒーレンスで完結するような問題についてはこのゆらぎは問題とならない.

これをはっきりと示したのが<sup>18)</sup>であり, 図 31 に示したように, クーロン振動と, フラクソイドの量子化に伴うソースドレイン電流の不連続を伴った振動が同時に現われる. 後者については, クーロン島の超伝導秩序パラメタのフラクソイド状態を反映したものであることが明らかになっている<sup>19)</sup>.

## §8 マクロ量子トンネル・コヒーレンス

マクロ量子トンネル (Macroscopic Quantum Tunneling, MQT) 効果は, 概念としては非常に広く, 磁性体の磁化や化学反応, 生物学的現象, 地球物理学や果ては宇宙論までの応用が考えられている. ここでこれを取り上げるのは, メゾスコピック系が, MQT の「人間がデザインした実験」を行うには最適の系であるからである. MQT の実験の代表的な舞台の一つが小さな Josephson 接合であるが, これについては次節以降で詳しく述べる. 本節では, MQT の基本的な考え方と Cardeila-Leggett 理論<sup>20)</sup>を紹介する. MQT を考えることの物理学での動

機のひとつは, 「観測問題」であるが, ここでは触れない<sup>21)</sup>. それ以外にも, メゾスコピックサイズの物体の物理量の時間発展を考える上で, MQT が重要になるのは間違いない. MQT とは, 「マクロな変数 (物理量, 自由度と言っても良い) 空間での量子力学的トンネル現象」である<sup>22)</sup>. ここで「マクロな変数」とは何か, という定義を与えるにはある程度の準備が必要である.

### §8.1 マクロ変数

古典力学的世界観に対する量子力学の世界像の特徴は, 「揺らぎ」にある. 後者においてはほとんどあらゆる物理量は本質的な揺らぎを持っている. 我々の日常生活ではこのような揺らぎを感じる事はなく, 多くの現象は古典力学で説明がついてしまう. これは, 日常レベルで扱う力学変数が, マクロ変数であり, 揺らぎが小さいためである. 即ち, 多数の粒子ででき上がったマクロな系では個々の粒子の自由度に相当する変数以外に系の運動を代表する変数が定義でき, その量子力学的な揺らぎは粒子数の増加とともに減少する. このようなマクロ系に独特の変数をマクロ変数と呼んでいる.

最も簡単な例として,  $N$  個の同種粒子でできた系を考える. マクロな極限とは, このような系で  $N \rightarrow \infty$  をとることである. 粒子の位置座標を  $x_1, x_2, \dots, x_N$  とすると, 重心座標  $X$  は

$$X \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (71)$$

である. この系の Lagrangian は粒子  $(i, j)$  間の相互作用ポテンシャルを  $V(x_i - x_j)$  として

$$L(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - \sum_{i,j=1, i \neq j}^N V(x_i - x_j) \quad (72)$$

とかける.  $x'_i \equiv X + x_i$  とおくと,  $\sum_{i=1}^N x'_i = 0$  である.  $L(x, \dot{x})$  を  $X$  と  $x'$  で表すと

$$L(x, \dot{x}) = \frac{mN}{2} \dot{X}^2 + f(x'_1, \dots, x'_N) \quad (73)$$

となる.  $f$  は相対座標だけでかける関数である.  $\prod_i dx_i = dX \prod_i x'_i$  より, (27) の Feynman 核は

$$\begin{aligned} K(x^b, x^a, T) &= \int_{a'}^{b'} dX dx'_1 \dots dx'_N \times \\ &\exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{mN}{2} \dot{X}^2 + f \right] dt \right] \end{aligned} \quad (74)$$

となる。ただし、 $a'$ ,  $b'$  は  $a$ ,  $b$  を  $X$ ,  $x_i'$  について書き直したものである。

ここで、どのような経路が最終的に経路積分に大きな寄与をするかを考える。特に、 $X$  の積分を取り出して考えると、指数関数の肩の虚部に  $N$  がかかっているの、 $N$  が大きくなると通常は経路のわずかな変化に対して位相部分が非常に大きく変化する。これは指数関数の値が実、虚部ともに経路の小さな変化に対して正負に大きく振動する事を意味し、これらが互いにキャンセルするため、積分への寄与は極めて小さい。この例外となる経路が、経路の微小な変化に対応する作用の変化  $\delta S$  が零となる経路で、

$$\ddot{X} = 0 \quad (75)$$

を保つようなものであり、これを既に述べたように「古典経路」と呼ぶ。古典経路の回りで作用を

$$S = S_0 + \frac{\delta^2 S}{\delta X^2} (\delta X)^2 + \dots \quad (76)$$

と展開すると、 $\exp(iNx) \rightarrow \delta(x)/\sqrt{N}$  ( $N \rightarrow \infty$ ) であるから、変数  $X$  についてはゆらぎは  $1/\sqrt{N}$  で小さくなってゆく。

以上のように、一般に系を構成する自由度の数が増加すると、それに伴って量子力学的な揺らぎの小さな力学変数が発生する。これをマクロ変数と呼んでいる。上の最も簡単な例ではマクロ変数は古典力学の方程式に従ったが、常にそうなるわけではなく、粒子間の相互作用などの系の特徴によって従う法則が決まる。例えば、超伝導体の秩序パラメタは、代表的なマクロ変数であるが、形式的には Schrödinger 方程式に従う。このことから超伝導の絡まる諸現象をマクロ量子現象 (Macroscopic Quantum Phenomena, MQP) と呼ぶこともある。しかし、これは決して秩序パラメタが量子力学的に揺らいでいるわけではない。上の重心の例で、マクロな極限 ( $N \rightarrow \infty$ ) が古典経路と一致した理由を考えると、ラグランジアンで  $X$  と  $x_i$  にそれぞれ依存する部分が分離して書いており、従って、全体の波動関数が変数を  $X$  とするものと  $x_i$  とするものとの積で書ける。このようにマクロ変数とマイクロ自由度の間で変数分離が可能な場合、マクロ変数は古典的な決定論的方程式に従う。一般の場合はこのような変数分離ができない、即ちマクロ自由度とマイクロ自由度との間に相互作用が存在する。

先にも述べたように、MQT とはこのマクロ変数空間でのトンネルであり、真にマクロな極限 ( $N \rightarrow \infty$ ) では消滅する。ここで問題となるのは、マクロ系で成立する古典描像はマイクロな量子力学の単純な極限と捉えられる

かどうか、ということである。変数分離が可能な場合には、上でみたように「大数の法則」に従って古典経路が確立する。当然問題となるのは変数分離のできない、即ちマクロ・マイクロ間の相互作用が存在する場合である。これは、マクロな自由度からマイクロな自由度へのエネルギーの流れ、即ち、エネルギー散逸が存在する場合に相当する。量子力学は Hamilton 形式に従って成立しているので、マクロ系の量子力学を考える際に摩擦のようなエネルギー散逸をどのように取り入れれば良いかということは、常に問題となる。

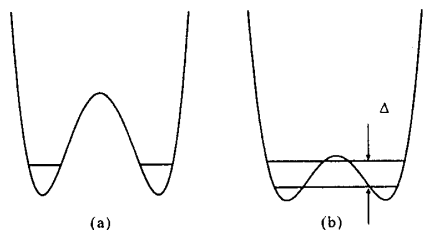
問題はもう一つある。重心の例では変数分離ができ、マイクロな自由度からマクロ変数が生じる過程を完全に追うことができた。しかし、マクロな系を考える際に、常にこのような事が可能なわけではない。明らかにマクロな自由度が存在するが、それがマイクロな自由度からどのように構成されるのか、わからない、あるいはわかっても単純な形になかなか書き下せない、という場合がむしろ大部分である。このような場合でも、古典的な運動方程式は半経験的に単純な形で書けているのが普通である。これを、電子や陽子の運動方程式を量子化したのと同じ正準量子化の手順 – ある運動変数に正準共役な変数を見つけ、両者の間に適当な交換関係を仮定する – で量子化して良いのだろうか。このような量子化法を直接量子化 (direct quantization) と称しているが、これには取りあえずきちんとした理論的根拠は存在しない。

以上2つの問題をまとめて平たく言うと、「マクロ変数に量子力学がそのままの形で適用可能か、その際、マイクロな自由度との相互作用はどのような働きをするのか」ということになる。

## §8.2 マクロ量子コヒーレンスとインスタント法

図 32(a) のような2つの谷を持ったポテンシャルの中にいる粒子を考える。「粒子」といっても、この一次元空間は抽象的な変数で、後で秩序パラメタなどマクロ変数にも応用できる。この粒子の周辺に多数の自由度を持つ「環境」を考え、粒子の自由度と環境の自由度との相互作用を考えることは、マクロ変数とマイクロ変数間の変数分離が不可能な場合を考える事に等しい。この粒子が本当に  $N \rightarrow \infty$  の極限のマクロ変数を表しているとする、量子力学的揺らぎは全く存在せず、(運動エネルギーが中央のポテンシャルを乗り越えるほど大きくない限りは) どちらかの谷に局在する。 $N$  が有限で揺らぎが残っている状態では二つの谷の間でトンネルが生じ、左右の谷に

図 32: 2 重量子井戸の 2 準位系



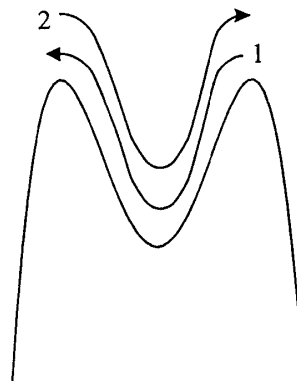
いる状態が共鳴状態を形成する。ここではこのようなトンネルについて、環境との相互作用がある場合－マクロ変数とミクロ変数間の変数分離が不可能な場合－に何が起こるか考える。

後でみるように、相互作用がある時には、今考えているようにトンネルした後で再びトンネルしてもとへ戻ることができる場合と、原子核の $\alpha$ 崩壊のように、トンネルした後は粒子の運動エネルギーが大きくなってポテンシャルの外へ逸出してしまう場合との間に定性的な違いが存在する。粒子がポテンシャルの谷の間を行き来できる場合は、二つの谷の間に量子力学的なコヒーレンスが生じる。マクロ変数空間でこのようなことが生じる現象を特にマクロ量子コヒーレンス (Macroscopic Quantum Coherence, MQC) と呼んでいる。

簡単に復習しておこう。まず、中央の障壁の高さを無限大とし、それぞれの谷で固有値・固有方程式を求める。2つの谷の形は全く同じなので、エネルギー固有値は左右で縮退している (図 32(a))。中央障壁の高さを下げていくと、トンネルによって左右の波動関数に混じりが生じ、固有状態は左右に均等に広がったものになる。これに伴って縮退がとけ、エネルギー準位に分裂が生じる (図 32(b))。これをトンネル分裂と呼び、中央障壁のトンネル確率に比例する。これを  $\Delta$  とおく。この系で、何等かの方法で片方の谷に粒子の波動関数を完全に局在させた状態を作り出し、その時間発展を調べる。波動関数はトンネルによってやがて他方の谷にしみだし、ある時刻には両方の谷に同じように広がるが、その後最初に局在したのとは反対側の谷に局在してしまう。更に時刻がたつと、波動関数は元の谷に戻っていく。この振動現象は、トンネル分裂した二つの準位の波動関数の間の「うなり」現象によるもので、その振動 (量子振動あるいはコヒーレンス振動) 数は当然  $\Delta/\hbar$  である。このように2つの準位への分裂を伴うことから、このような系を「2準位系」と呼ぶこともある。

虚時間形式で考えることにすると、作用は (29) の指数

図 33: 虚時間形式での 2 重量子井戸ポテンシャル



の肩でかけられるので、虚時間を普通の時間に読みかえれば、これは前にも述べたように丁度図 33 のようにポテンシャルを上下逆転した系での運動を考えている事に対応する。このとき古典経路として図 33 に 1 と示したような、ひとつの山を転がり落ちてもう一つの山にかけのぼるものが存在する。ポテンシャルの形として

$$V(x) = \frac{M\omega_0^2}{8X_a^2}(X^2 - X_a^2)^2 \quad (77)$$

をとると、このような解として解析的に

$$X(\tau) = X_a \tanh(\omega_0\tau/2) \quad (78)$$

が得られ、これは虚時間軸上で局在した解である。このような虚時間形式における、虚時間軸上で局在した古典経路をインスタントンと呼ぶ。この系の古典経路は元の系では虚時間による減衰ファクターによって減衰する。例えば、山をどんどん落ちていってしまう局在していない古典経路は元の系では著しく減衰する。このようにインスタントン解は、元の系では運動エネルギーが負になる部分を含んだ運動、即ちトンネルを表している。トンネルを古典経路として扱うことができるのが、虚時間形式の一つのメリットである。インスタントンは、古典的な粒子の運動としては粒子が山頂に静止しているのであるから不安定である。しかし、作用関数の停留点としては安定である。このように、虚時間形式の場合、解の安定性までは古典的なアナログが通用しない。

1 という経路に対し、逆向きの 2 という経路も当然存在し、インスタントンの一種である。ただし、粒子の運動としては、最終的に 1 というインスタントンの影響を打ち消す働きをするので、1 をインスタントンと称する場合、アンチインスタントンと呼ぶ。この系では、インスタントンの部分を除いては粒子は左右のどちらかのみ



に存在するので、インスタントン、アンチインスタントンは虚時間軸上で必ず代的に現れる。今、両者の数が同じである場合、即ち境界条件  $X(0) = X(\beta)$  の場合を考える。虚時間軸上でインスタントン間の距離は十分離れており、作用はそれぞれの寄与を加えることで求まるとする。これは、インスタントンを1次元の虚時間軸上の粒子と捉えると、1次元インスタントン気体がお互いの広がりに対して十分に離れていることを意味しており、希薄なインスタントン気体の近似と呼ばれる。この近似によって面倒な経路積分を普通の積分にすりかえて実行してしまえるようになる。インスタントンの広がり  $1/\omega_0$  程度であるから、インスタントンペアの数を  $n$  とすると、この近似は  $\beta\omega_0 \ll n$  を意味し、トンネル確率が十分に小さく、WKB 近似が成立するのと同じ条件を表している。この時、(29,30) より系の分配関数は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(\beta\omega_0)^{2n}}{(2n)!} \right] \exp(-4nM\omega_0 X_a^2/3\hbar) \\ = \cosh(\beta\omega_0 \exp(-4nM\omega_0 X_a^2/3\hbar)) \quad (79)$$

となる。これは、 $\delta E \equiv \omega_0 \exp(-(2/3)M\omega_0 X_a^2)$  とおくと、 $\delta E$  という2準位系の分配関数である。即ち、これは二つの谷の中の状態が、トンネルによってエネルギー分裂をおこすことを表している。即ち、 $\delta E$  は前に述べたトンネル分裂  $\Delta$  そのものであり、トンネル確率に比例する。したがって、 $\Delta (= \delta E)$  を調べれば、トンネルの様子がわかる。

### §8.3 摩擦による系の古典化

ミクロな自由度まですべてフォローすれば、エネルギーの散逸などは存在しないので、これに量子力学を適用できる。そこで、全体の系を注目している部分と「外界」とに分け、注目している部分系だけの運動方程式を取り出せば、エネルギー散逸のある場合にも量子力学を適用できる。これが、「(部分)系+外界」モデルの基本的シナリオである。以下、Caldeira と Leggett (CL) のモデルを紹介する。

外界として無限の自由度を持つ調和振動子の集合を考える。ハミルトニアンは

$$H = H_0 + \sum_{\alpha} \left[ \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2}{2} \right] + g x \sum_{\gamma} c_{\gamma} x_{\gamma} \quad (80)$$

である。 $H_0$  は注目している部分系、2項目は「外界」ないし「環境」の部分、3項目が相互作用の部分である。CL のモデルでは、上の式のように相互作用は双1次形

式と仮定している。この仮定がどの程度一般的なものかは、文献 20 に詳しい。

この系の状態和は

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta H) \\ = \int DX D x_{\alpha} \exp[-S/\hbar] \quad (81) \\ S = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[ \frac{M \dot{X}^2}{2} + V(X) \right. \\ \left. + \sum_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{2} \dot{x}_{\alpha}^2 + \frac{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2}{2} x_{\alpha}^2 + g c_{\alpha} X x_{\alpha} \right) \right] \quad (82)$$

となる。ここで、 $H_0 = M \dot{X}^2/2 - V(X)$  とおいた。環境の自由度  $x_{\alpha}$  についての積分は Gauss 積分となり、解析的に実行できる。ここで、マクロ変数  $X$  についての有効作用  $S_{eff}(X)$  を

$$Z = \int DX \exp(-S_{eff}/\hbar) \quad (83)$$

で定義すると、計算の詳細については文献 6 などを参照していただくことにして、環境についての積分の結果、

$$S_{eff} = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \frac{M}{2} \dot{X}^2 + V(X) \\ + \int_0^{\tau} d\tau' K(\tau - \tau') X(\tau) X(\tau') \quad (84)$$

という形で表される。ここで、積分核  $K$  は、

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \frac{\cosh(\beta\omega/2 - \omega|\tau|)}{\sinh(\beta\omega/2)} \\ J(\omega) = \frac{\pi}{2} g^2 \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \delta(\omega - \omega_{\alpha}) \quad (85)$$

で与えられる。(84) の第1項 ( $S_0$  と呼ぶことにする) は環境と相互作用のない場合の自由度  $X$  についての作用の表式に他ならない。従って、第2項 ( $S_1$  と呼ぶ) がマクロ変数と環境との相互作用を表す部分である。 $\tau$  についての積分の中身を見ると、 $\tau$  と  $\tau'$  の両変数を持っている。この部分はこの二つの虚時間に対応するマクロ変数の間に一種の相互作用が発生することを示している。これは虚時間を時間そのものと読み替えると、マクロ変数の運動に記憶作用があると表現することもできる。

この「記憶項」を更に次のように変形する.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') \times \\
 & \quad \{X(\tau)^2 + X(\tau')^2 - (X(\tau) - X(\tau'))^2\} \\
 & = -\int_0^{\beta\hbar} d\tau X(\tau)^2 \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') (X(\tau) - X(\tau'))^2
 \end{aligned} \tag{86}$$

(86) の第1項は

$$V'(X) \equiv V(X) - \left[ \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') \right] X^2$$

とおくことで, 形式上ポテンシャルにとりこまれるので, 第2項が重要である. これを最小にする経路は  $X(\tau) = X(\tau')$  すなわち  $X(\tau) = \text{const.}$  である. これは, この項が, マクロ変数を一箇所に止まらせようという傾向を持っていることを示している. これはまさに摩擦の性質である.

次に CL は結合定数  $J(\omega)$  の形式として  $J(\omega) \propto \omega(\omega \rightarrow 0)$  を仮定した. これは, Ohmic な場合と呼ばれ, 多くの具体的な物理系で成立すると考えられている. ここで,  $J(\omega) = \eta\omega$  で  $\eta$  を定義する.

古典経路は,

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial X} + g \sum c_\alpha x_\alpha = 0 \tag{87}$$

$$m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} + m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha + g c_\alpha X = 0 \tag{88}$$

で与えられる. Fourier 変換

$$X(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt X(t) e^{i\omega t}$$

を考えると, 古典経路は

$$-M\omega^2 X(\omega) - iM\omega\gamma(\omega)X(\omega) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial X} = 0 \tag{89}$$

と書き換えられる. ここで,

$$\begin{aligned}
 \gamma(\omega) & \equiv i \frac{\omega}{M} g^2 \sum_\alpha \frac{c_\alpha^2}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_\alpha^2 + 0+} \\
 & = -i \frac{\omega}{M} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega'} \frac{1}{\omega^2 - \omega_\alpha^2 + 0+}
 \end{aligned} \tag{90}$$

$$\tilde{V} = V - g^2 X^2 \sum_\alpha \frac{c_\alpha^2}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \tag{91}$$

である. 上の定義から  $\text{Re}\gamma(\omega) \rightarrow \eta/M$  ( $\omega \rightarrow 0$ ) であるから古典経路の  $\omega \rightarrow 0$  での表式は

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + \eta \frac{dX}{dt} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial X} = 0 \tag{92}$$

で, 摩擦のある系のニュートン方程式に一致し,  $M\eta$  は動摩擦係数に相当することがわかる. 即ち, 動摩擦力が質点の速度に比例する, という経験則は結合スペクトル関数に「Ohmic」の仮定を持ち込んだ事に等しい.

摩擦項 (あるいは記憶項) が相互作用のない部分に比べて小さな場合, これを摂動として取り扱うことを考える. 以下, 摩擦項のない場合の量を添え字 0 で表すことにする. 摩擦項のない場合のインスタント経路を  $X_a(\tau)$  として, 摩擦項によってこれが  $X(\tau) = X_a(\tau) + \delta X(\tau)$  へ変化すると考えると,  $X_a(\tau)$  は相互作用のない時の作用の経路による1次の変分を零にする経路なので, (76) と同様に,

$$S_0(X(\tau)) = S_0(X(\tau)) + \frac{\delta^2 S_0}{\delta X(\tau)^2} \delta X(\tau)^2 \tag{93}$$

$$S_1(X(\tau)) = S_1(X_a(\tau)) \tag{94}$$

である. 希薄なインスタントの近似を用いると,

$$\Delta = \exp(-S_1(X_a)/\hbar) \cdot \Delta_0 = \exp\left(-\eta \frac{\Delta X^2}{\hbar}\right) \cdot \Delta_0 \tag{95}$$

となって, この摩擦項自身はトンネル確率を下げる方向に働く. ただし,  $\Delta X \equiv X(\text{final}) - X(\text{initial}) = 2X_a$ . 注意を要するのは, ポテンシャルの繰り込みであり, これは必ずポテンシャルを下げる方向に働くので, トータルではトンネル確率は増加する. しかし, これは環境との相互作用によってトンネル確率が増えたというよりは, 相互作用項を付け加えた際に, 摩擦を表す部分以外の項も加えてしまったために生じたポテンシャルの変形によるものというべきであろう. そこで, CL は相互作用を導入する際にカウンター項と称して

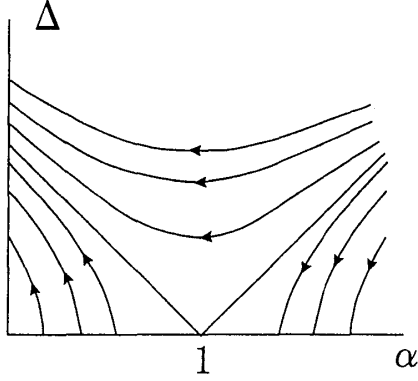
$$g^2 x^2 \sum_\alpha \frac{c_\alpha^2}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \tag{96}$$

を付け加え, このポテンシャルの変形が打ち消されるようにしている. これを認めれば, 摩擦によりトンネル確率は必ず減少する.

これは, 最初に提出した問題に対して一つの解答を提出している. 即ち, マクロ変数がミクロな自由度との間に相互作用を持っている場合には量子力学的な揺らぎは単純に大数の法則で小さくなっていく以上に小さくなる, ということである. 以上の CL の理論については, 実験的なサポートが得られつつある.

上の議論は摩擦項の影響が極めて小さいとしたため, 二谷系 (あるいは2準位系) の特徴はでていない. 二谷の間を粒子が往復することの効果調べるためには  $\alpha$  を

図 34: 2 準位系の繰り込み群方程式の解曲線群



ある程度大きくして 1 に近づけた場合を考える必要がある。(86) を 2 回部分積分すると、摩擦項は

$$-\eta \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^{\beta\hbar} d\tau' \frac{X(\tau)}{d\tau} \frac{X(\tau')}{d\tau'} \ln \left| \frac{\tau - \tau'}{\tau_0} \right| \quad (97)$$

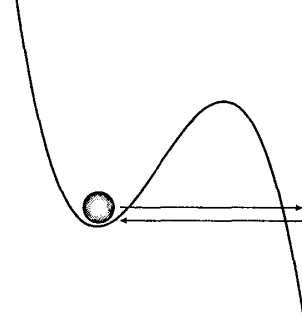
となる。 $\tau_0$  は積分のカットオフで、谷の中での零点振動の周期程度である。希薄なインスタントン近似によって

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Delta}{2} \right)^n \int_0^{\beta\hbar} d\tau_n \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \times \exp \left( \alpha \sum_{i \neq j} (-1)^{i-j} \ln \left| \frac{\tau_i - \tau_j}{\tau_0} \right| \right) \quad (98)$$

となる。ただし、 $\tau_i, \tau_j$  はインスタントンの微分をデルタ関数で近似し、その中心位置にとったものである。また、 $\alpha$  は摩擦の強さを表す無次元量で、ほぼ  $\eta$  である。

このような型の分配関数は、近藤問題などに関係し、繰り込み群の方法を使ってその性質が調べられている。Chakravarty によれば、これを援用すると、繰り込み群方程式の解曲線群は図 34 のようになり、絶対零度では  $\Delta = 0$  となる古典的な曲線群と、 $\Delta$  が有限で量子力学的な曲線群に分かれる<sup>26)</sup>。ここで使っている近似が有効な  $\Delta \rightarrow 0$  の場合は、 $\alpha$  が 1 より大きな場合、摩擦によって  $\Delta = 0$  すなわちトンネルが完全に禁止されてしまう。これは極めて著しい結果で、摩擦がある程度大きいとこのような 2 準位系の場合はトンネルが禁止されて系が全く古典化することを意味している。この完全な古典化（マクロ化）のもと、環境の自由度が無限大であった事によって、すなわち、ある程度環境との相互作用が強くなると、着目しているマクロ変数の量子力学的な揺らぎは環境の揺らぎをも伴うものとなり、環境は自由度無限大であって揺らぎが原理的にないため、結局もとのマクロ変数も揺らぐことができなくなる。

図 35:  $\alpha$  崩壊型のトンネリング



Schmid は双対変換の方法を用いて摩擦項の更に驚くべき性質を指摘した<sup>27)</sup>。即ち、摩擦が入る前は非常にトンネルが盛んな、即ち  $\Delta \rightarrow \infty$  の極限でも全く同じことが成立する。即ち、摩擦が強くなって  $\alpha$  が 1 を超えるとトンネルは禁止され系は古典化する。ただし、この「古典化」は、時間スケールの問題を無視した結果生じているものであり、有限時間内の観測であれば、トンネルは問題なく観測され则认为られる。

#### §8.4 $\alpha$ 崩壊型のトンネリング

$\alpha$  崩壊のようにトンネルした後粒子が運動エネルギーを得て遠くへ去ってしまうような場合、このようなポテンシャルは例えば

$$V(X) = \frac{M}{2} \omega_0^2 X^2 \left( 1 - \frac{X}{X_a} \right) \quad (99)$$

のような 3 次式で与えることができる (図 35)。2 準位系と同様に虚時間形式で考え、古典経路を求めると、

$$X = \frac{X_a}{\cosh^2(\omega_0 \tau / 2)} \quad (100)$$

となり、0 から出発して一旦  $X_a$  に到達し、再び 0 に戻ってくるような解である。このような解をバウンス (bounce) 解と呼んでいる。2 準位系の場合には、古典経路は実時間形式と虚時間形式で谷間を結ぶか山間を結ぶかの違いであったが、この場合には実時間ではトンネルした後坂を転がり落ちてしまうような経路に対して、虚時間ではポテンシャルに跳ね返されて戻って来ってしまう経路を考えることになり、かなり際立った違いが生じる。このバウンスに対する作用は

$$S_B = \frac{36}{5} \frac{V_b}{\omega_0}, \quad V_b = \frac{2M\omega_0^2 X_a^2}{27} \quad (101)$$

で与えられる。ここで、 $V_b$  はポテンシャルの障壁高さである。 $X(0) = 0$  の状態の崩壊確率は  $\exp(-S/\hbar)$  に比例する。

## §9 マクロ量子コヒーレンスに関する実験

最後に、MQT/MQC に関する実験をいくつか紹介しよう。これらはまだ端緒についたばかりであり、実験的な困難の大きさを感じさせられるものも多いが、このように曲がりなりにも実験が可能になってきた、ということだけでも、むしろ驚くべきことである、というべきであろう。

### §9.1 Disconnectivity

「マクロな変数」と一口に言っても、どの程度マクロか? と聞かれると、その指標を示すのは今のところ困難である。Leggett はごく大まかな見積もりとして、disconnectivity というものを考えたが、これは、ミクロな自由度を  $N$  個束ねたマクロ変数のマクロ指標 (disconnectivity) を  $O(N)$  程度としよう、という極めてあやふやで、かつ勘定のしにくいものである。この問題は、今後理論と実験の発展と共に詰めていかなければならないものであり、ここでは、問題の指摘に止めざるを得ない。

### §9.2 MQT に関する実験

ここでは、Josephson 接合を使った Voss と Webb の実験を紹介しよう<sup>28)</sup>。実験そのものは大変単純なもので、Josephson 接合を電流バイアスして、電圧状態に移する臨界電流を何度も調べてその分布を測定する。位相変数に対するコサイン障壁が電流によって傾くため、あるバイアス値でトンネルまたは熱活性によってコサインポテンシャルから位相粒子が逃げ出すと電圧状態に移する。温度依存性を調べて温度に臨界電流が依存しなくなれば、トンネルが主な逸出の機構と考えられる。逸出した後、元に戻らないことから、 $\alpha$  崩壊型のトンネルと考えてよい。図 36(b) のように、低温で臨界電流は一定値となり、CL 理論と良く一致している。

これは、CL 理論と良い一致を示した例であるが、必ずしも一致する例ばかりではなく、また、解析も困難な場合が多い。

図 36: Josephson 接合を使った MQT 実験の例

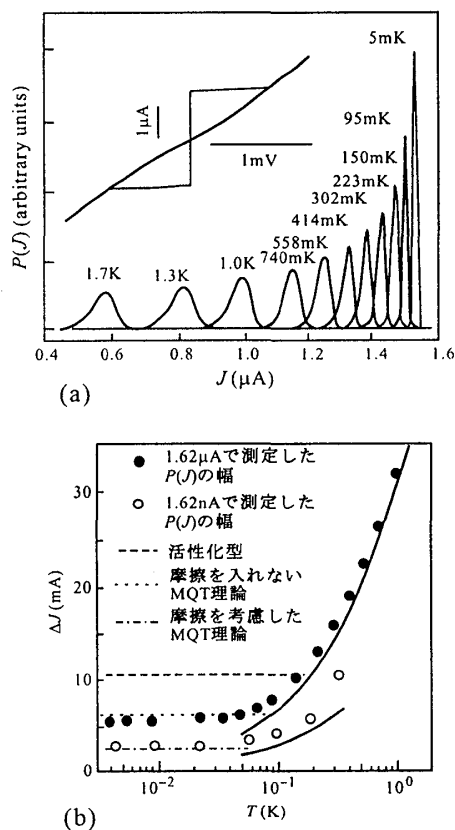


図 37: 微小接合にマイクロ波を照射することで、ポテンシャル中の位相変数の離散化を調べた実験

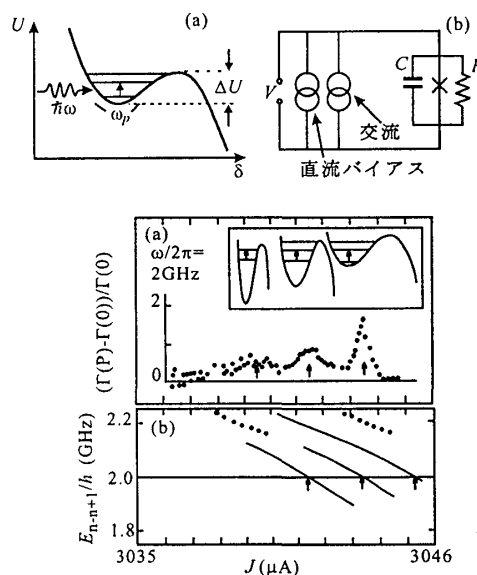
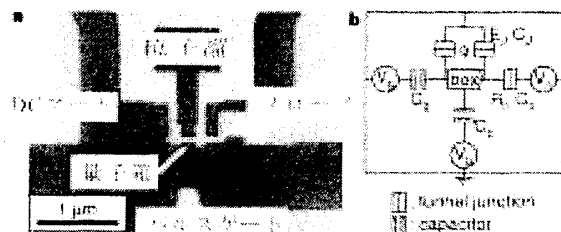


図 38: 中村らの実験に使われた試料. (a) 電子顕微鏡写真 (b) 等価回路



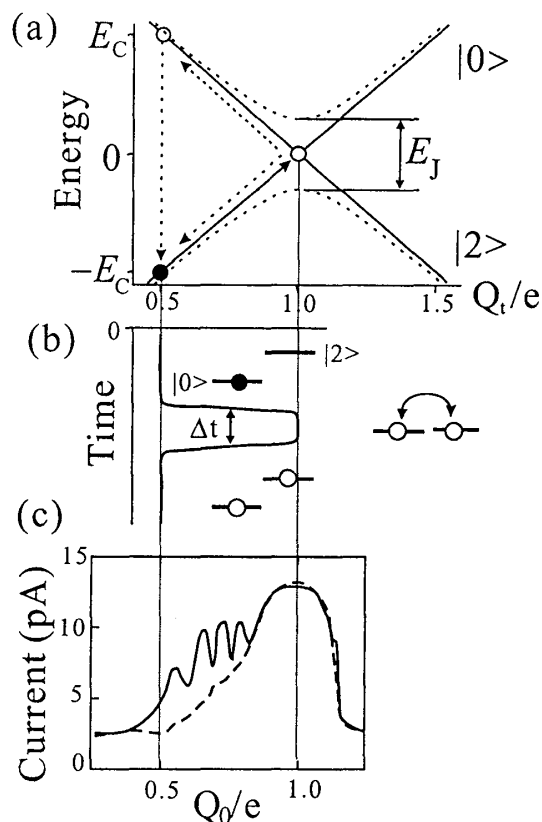
### §9.3 MQC に関する実験

まず、実験で観測している現象自身は  $\alpha$  崩壊型だが、ポテンシャル内でのコヒーレンスがその結果に影響を与えている、という Martinis らによる実験を紹介しよう<sup>29)</sup>。これは、Josephson 接合が電圧状態に転移する臨界電流を見る、と言う点では、Voss-Webb の実験と同じであるが、マイクロ波を照射しながらの測定を行う。「位相変数粒子」がコサインポテンシャルに閉じ込められることで、図 37(a) のように離散準位を形成していればマイクロ波がこの準位間隔に共鳴したところでトンネル確率が増大するはずである。実験結果は図 37 の下の図のようになかなか厳しいものだが、一応 3 つのピークが現れ、MQC-MQT についての Larkin-Ovchinnikov の理論と良く一致していることが確認されている。

最後に、コヒーレンスに関して極めて明瞭な中村らの実験を紹介しよう<sup>30)</sup>。中村らの試料の形状は、Elion らの実験でクーロン島につながれていた 2 つのトンネル接合の内一つだけを残して量子箱の構造にしたものである。粒子溜めにつながった dc-SQUID の構造は同じである。また、ゲート電極が、通常の DC バイアスを与えるためのもの以外にパルスバイアスを与えるためのものが用意されている。

まず、ゲート電極を調整して、クーロン島の電子数 (クーパー対数) 状態  $|n\rangle$  と  $|n+1\rangle$  とが縮退にある程度近い状態を実現する。しかし、縮退状態からは (例えば)  $|n\rangle$  の方に少しずれた状態に置く。この時、接合の Josephson エネルギーが存在すれば、この 2 つの状態を結ぶ行列要素が存在するのでパルスゲートに電圧を与えて、一気に縮退状態に持っていくと、これら 2 つの状態の間でコヒーレンス振動が起こる。パルスが終わってもとの状態に戻った場合、 $|n\rangle$  の状態であれば電子の移動は起こらないが、 $|n+1\rangle$  であれば電子の移動が必要となる。従って、クーロン島が十分に緩和した後に同じ長さのパルスを繰り返せば、流れる電流は  $n+1$  の状態に系を見

図 39: 粒子数状態間のコヒーレンス振動を観察する実験 (a) コヒーレンス振動のエネルギー準位ダイヤグラム (b) コヒーレンス振動の時間を制限するためのパルスの模式図 (c) パルス幅を変化させた時の電流でみた典型的なコヒーレンス振動



出す確率に比例する。従って、パルス幅を変化させながら電流を見れば、コヒーレンス振動をそのまま観測できることになる。図 39(c) に示したのがその様子である。

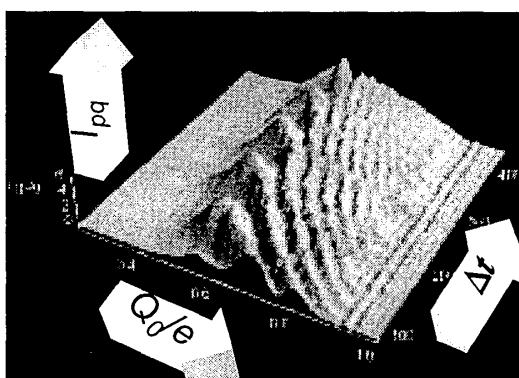
この実験は、コヒーレンスを観測していることには疑いの余地がない。問題は、disconnectivity がどの程度高いかである。間違いなくこの系よりはるかに disconnectivity の高い系として、量子渦糸のコヒーレンスを見ようという実験が試みられており、周波数ドメインでの観測には成功した、と報じられているが、この電荷数状態間のコヒーレンスほど明瞭なデータとは言いがたい状況である。

### 参考文献

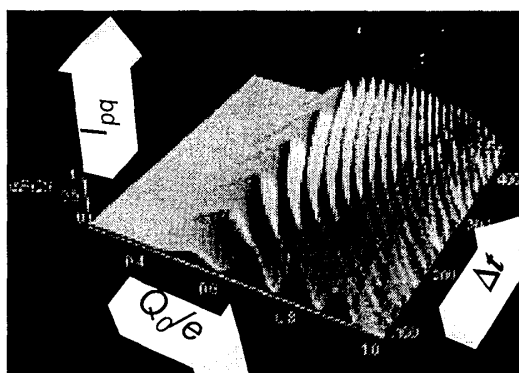
- 1) 福山秀敏編 「メソスコピック系の物理」, (1996, 丸善)
- 2) 川畑有郷 「メソスコピック系の物理」, (1997, 培風館)

図 40: 直流ゲートとパルス幅を変化させながら, コヒーレンス振動の様子を観測したもの. 上の図は実験結果. 下の図は Schrödinger 方程式を解いてシミュレーションを行ったもの.

### Experiment



### Simulation



- 3) L. Esaki, T. Tsu, IBM J. Res. Develop., **14**, 61 (1970).
- 4) T.C.L.G. Sollner et al., Appl. Phys. Lett. **43**, 588 (1983).
- 5) 崎田文二, 吉川圭二, 「経路積分による多自由度系の量子力学」(1986, 岩波書店).
- 6) 永長直人, 「物性論における場の量子論」(1995, 岩波書店).
- 7) R. P. Feynman and A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals" (1965, McGraw-Hill).
- 8) B. J. van Wees et al., Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).
- 9) Y. Gefen, Y. Imry and M. Ya Azbel, Phys. Rev. Lett. **52**, 129 (1984).
- 10) Y. Imry, "Introduction to Mesoscopic Physics", (Oxford, 1997).
- 11) 川畑有郷, 日本物理学会誌 **55**, 256 (2000).
- 12) M. Tinkham, "Introduction to Superconductivity", 2nd ed. (MacGrawHill, 1997).
- 13) M. Matters, W. J. Elion and Mooij, Phys. Rev. Lett. **75**, 721(1995).
- 14) P. Joyez, P. Lafarge, A. Filipe, D. Esteve and M. H. Devoret, Phys. Rev. Lett. **72**, 2458(1994).
- 15) D. B. Haviland, Y. Harada, P. Delsing, C. D. Cheng and T. Claeson, Phys. Rev. Lett. **73**, 1541(1994).
- 16) W. J. Elion, M. Matters, U. Gigenmüller, J. E. Mooij, Nature **371**, 594 (1994).
- 17) S. Katsumoto and M. Kimura, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 3704 (1996).
- 18) H. Sato, M. Kimura and S. Katsumoto, Jpn. J. Appl. Phys. **36**, 3978(1997).
- 19) H. Sato, S. Katsumoto and Y. Iye, Physica **B249-251**, 453(1998).
- 20) Caldeira and Leggett, Ann. Phys. **194**, 374 (1983).
- 21) 「パリティ」(丸善) 2000 年 4 月号が観測問題の特集を組んでいる.

- 22) 福山秀敏, 固体物理 **30**, 1 (1995).
- 23) E. Simanek, "Inhomogeneous Superconductors" (1994, Oxford).
- 24) U. Weiss, "Quantum Dissipative Systems" (1993, World Scientific).
- 25) A. J. Leggett in "Quantum Tunneling in Condensed Media", (1992, Elsevier).
- 26) S. Chakravarty, Phys. Rev. Lett. **49**, 681 (1982).
- 27) A. Schmid, Phys. Rev. Lett. **51**, 1506 (1983).
- 28) R. F. Voss and R. A. Webb, Phys. Rev. Lett. **47**, 265 (1981).
- 29) J. M. Martinis, M. H. Devoret and J. Clarke, Phys. Rev. Lett. **55**, 1543 (1985).
- 30) Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin and J. S. Tsai, Nature **398**, 786 (1999).